

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МОРСКОЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О.В. ГОВОРОВА

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Утверждено учебно-методическим советом университета
в качестве учебного пособия*

Санкт-Петербург
2020

УДК 514.182
ББК 22.151.3
Г57

Рецензенты:

кандидат технических наук *С.В. Чехович*;
заведующий кафедрой, доцент *И.В. Костылев*

Говорова О.В.

Г57 Начертательная геометрия: учеб. пособие / О.В. Говорова. – СПб.: Изд-во СПбГМТУ, 2020. – 135 с.

В учебном пособии рассмотрены основные положения начертательной геометрии, приведены задачи и даны способы их решения. В книге представлено большое количество рисунков, необходимых для понимания предмета. Решение задач рассмотрено поэтапно, что облегчает восприятие способов решения задач.

Пособие предназначено для обучающихся всех форм обучения инженерных специальностей СПбГМТУ.

УДК 514.182
ББК 22.151.3

© СПбГМТУ,
2020

ПРИНЯТЫЕ В НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Точки пространства обозначают заглавными буквами латинского алфавита курсивом $A, B, C, D \dots Z$;

Точкой O обозначают начало координат;

Заглавной латинской буквой S обозначают центр проецирования;

Заглавной латинской буквой P обозначают параллельное проецирование;

Вспомогательные точки обозначают арабскими цифрами: $1, 2, 3 \dots 9$.

2. Прямые линии общего положения обозначают строчными буквами латинского алфавита курсивом: $a, b, c \dots z$.

Оси проекций: Ox, Oy, Oz ;

Строчной курсивной буквой s обозначают направление проецирования.

Прямые частного положения обозначают:

– параллельную горизонтальной плоскости проекций – h (горизонтальная прямая или горизонталь плоскости);

– параллельную фронтальной плоскости проекций – f (фронтальная прямая или фронталь плоскости);

– параллельную профильной плоскости проекций – p (профильная прямая).

3. Плоскости:

– общего и частного положения – строчными буквами греческого алфавита: α (альфа), β (бета), γ (гамма), ω (омега);

– плоскости проекций – греческой прописной буквой π (пи):

π_1 – горизонтальная плоскость проекций,

π_2 – фронтальная плоскость проекций,

π_3 – профильная плоскость проекций;

– бисекторные плоскости:

σ (сигма) – первая бисекторная плоскость симметрии,

τ (тау) – вторая бисекторная плоскость тождества;

вспомогательные плоскости: π_4, π_5 или π_0 .

4. Угловые пространства (четверти пространства) – римскими цифрами I, II, III, IV .

5. Углы наклона элементов пространства (прямых или плоскостей):

– к горизонтальной плоскости проекций π_1 – φ° (фи);

– к фронтальной плоскости проекций π_2 – ψ° (пси);

– любой другой угол – строчной буквой греческого алфавита с символом угла $^\circ$.

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ СИМВОЛЫ

1. $=$ – результат действия:
 $K = \alpha \cap m$ – точка K является результатом пересечения плоскости α и прямой m .
2. \perp – перпендикулярность:
 $a \perp b$ – прямая a перпендикулярна прямой b .
3. \in – принадлежность:
 $A \in a$ – точка A принадлежит прямой a .
4. \notin – не принадлежит:
 $M \notin a$: точка M не принадлежит прямой a .
5. \parallel – параллельность элементов:
 $c \parallel d$ – линия c параллельна прямой d .
6. \cap – пересечение:
 $l \cap m = A$ – прямые l и m пересекаются в точке A .
7. \equiv – тождество или совпадение:
 $A_1 \equiv B_2$ – горизонтальная проекция точки A совпадает с фронтальной проекцией точки B .
8. \cong – конгруэнтность (равенство по величине):
 $\triangle ABC \cong \triangle A_0 B_0 C_0$.
9. \square – прямой угол;
10. --- – скрещивающиеся линии (линии не параллельные и не пересекающиеся).
11. \forall – квантор общности, читается: для всякого, для всех, любой.
12. \Leftrightarrow – эквивалентность, равнозначность.

1. МЕТОДЫ ПРОЕКЦИРОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМ НА ПЛОСКОСТИ

1.1. Центральное проецирование

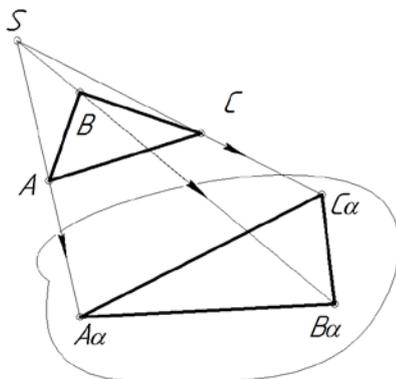


Рис. 1.1

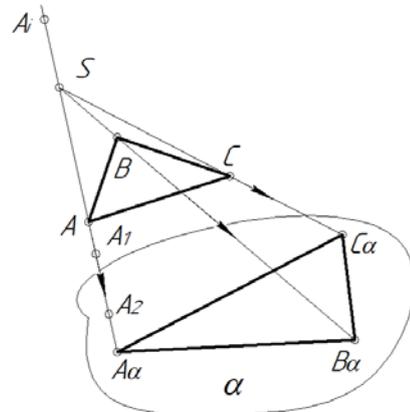


Рис. 1.2

Рассмотрим аппарат центрального проецирования (рис. 1.1), где s – центр проецирования, ABC – фигура проецирования, α – плоскость проецирования. Проецирующий луч sA_α , пересекаясь с плоскостью проекций, дает проекцию точки на плоскости A_α . Размеры фигуры и ее проекции различны. Размер проекции $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ зависит от положения центра проецирования s и плоскости проецирования α . И хотя фигура проецируется по закону подобия, если плоскость приближать к оригиналу или удалять от него, нельзя судить об истинных размерах ABC по ее проекции. Каждой точке ABC соответствует одна проекция на плоскости α . Обратное утверждение не соответствует действительности (рис. 1.2): каждой проекции A_α соответствует множество точек пространства

$A_1, A_2 \dots A_i$. Для того чтобы стало возможным определить положение точки в пространстве, необходимо иметь две ее центральные проекции (рис. 1.3).

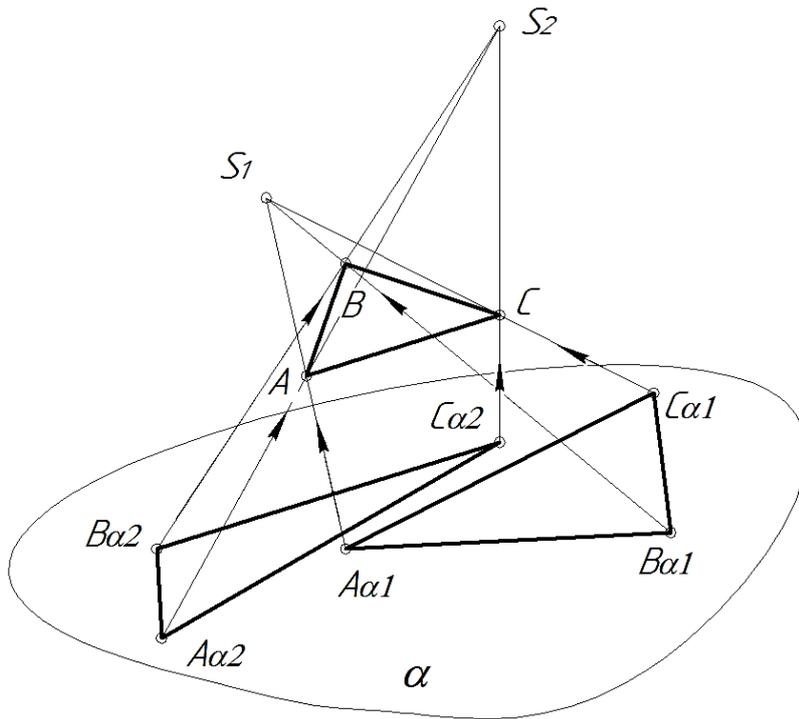


Рис. 1.3

1.2. Параллельное проецирование

Рассмотрим частный случай центрального проецирования, у которого центр проецирования удален в бесконечность, ρ – направление проецирования (рис. 1.4).

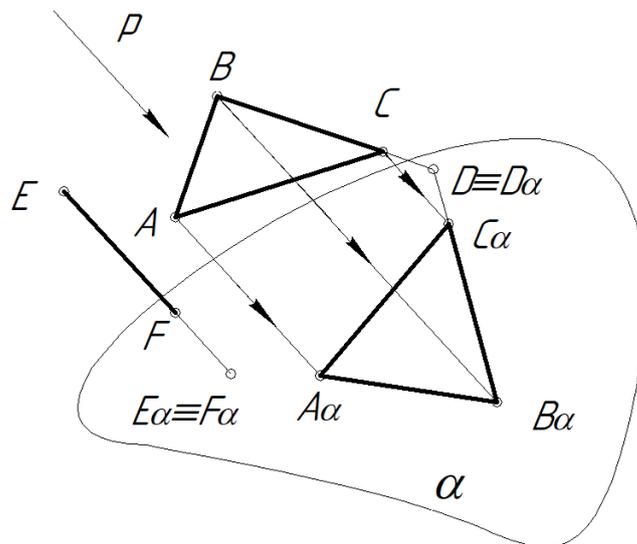


Рис. 1.4

Точка D принадлежит продолжению отрезка BC и плоскости проецирования α , поэтому $D \equiv D_\alpha$. Отрезок EF параллелен направлению проецирования, следовательно, его проекции совпадают на плоскости α $E_\alpha \equiv F_\alpha$. Такую проекцию называют *вырожденной*.

В зависимости от направления проецирования различают *косоугольное* и *прямоугольное (ортогональное)* проецирование. Проецирование называют *косоугольным*, если направление проецирования составляет произвольный угол с плоскостью проекций, и *ортогональным*, если угол между направлением проецирования и плоскостью проекций составляет 90° . Чертежи машиностроительные, строительные и кораблестроительные являются *ортогональными*. Параллельные проекции менее наглядны, чем при центральном проецировании, зато их удобнее измерять.

При параллельном проецировании нарушаются метрические характеристики геометрических фигур (искажаются линейные и угловые размеры). Характер искажения зависит от аппарата проецирования и положения проецируемой фигуры.

1.3. Инвариантные (неизменяемые) свойства ортогонального проецирования

Рассмотрим инвариантные свойства для элементов пространства.

1. Проекция точки A на плоскость α есть точка A_α (рис. 1.5)

$$P_S^\alpha: A \rightarrow A_\alpha.$$

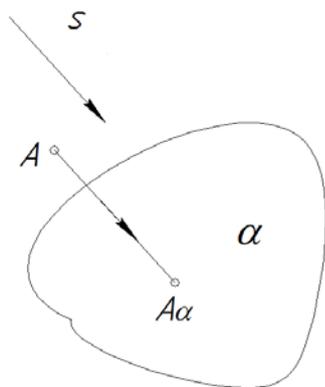


Рис. 1.5

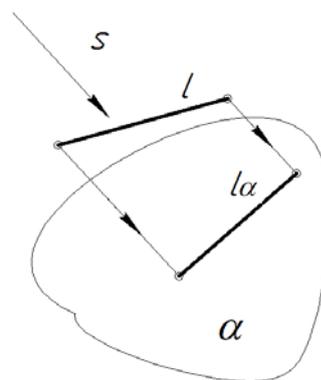


Рис. 1.6

2. Проекция прямой l на плоскость α есть прямая, если направление проецирования s не совпадает с прямой (рис. 1.6)

$$(\forall l)(l \not\parallel s) \left[l \xrightarrow{P_S^\alpha} l_\alpha \right].$$

3. Если в пространстве точка принадлежит линии, то проекция этой точки принадлежит проекции этой линии (рис. 1.7) $(\forall A, m)[A \in m \Rightarrow A_\alpha \in m_\alpha]$.

4. Проекции взаимно параллельных прямых взаимно параллельны (рис. 1.8):

$$c \parallel d \Rightarrow c_\alpha \parallel d_\alpha.$$

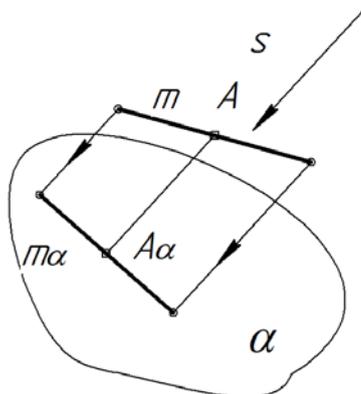


Рис. 1.7

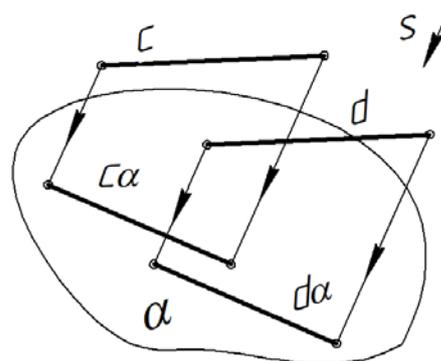


Рис. 1.8

Из четвертого свойства следует: если точка делит отрезок в каком-то соотношении, то проекция этой точки делит проекцию отрезка в таком же соотношении:

$$\frac{AN}{ND} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{A_\alpha N_\alpha}{N_\alpha B_\alpha} = \frac{m}{n}.$$

5. Точка пересечения проекций пересекающихся прямых является проекцией точки пересечения этих прямых (рис. 1.9).

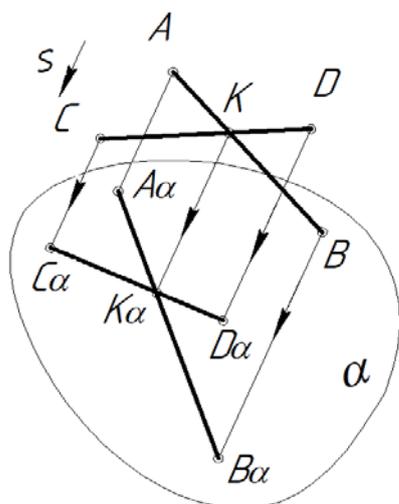


Рис. 1.9

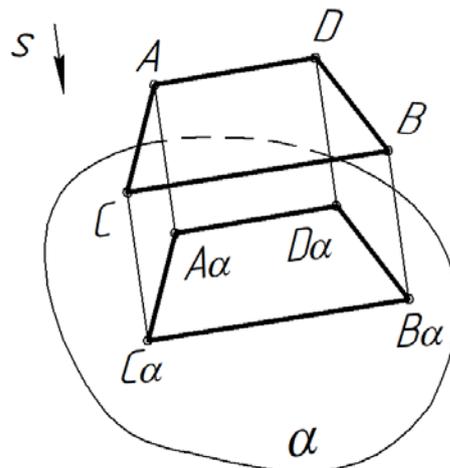


Рис. 1.10

6. Плоская фигура, параллельная плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в конгруэнтную фигуру (рис. 1.10).

7. Плоский многоугольник проецируется в общем случае в многоугольник с тем же количеством вершин.

8. *Скрещивающиеся* отрезки прямых могут проецироваться на плоскость проекций либо как параллельные, либо как пересекающиеся, в зависимости от направления проецирования (рис. 1.11). Определить взаимное положение элементов в пространстве по одной проекции невозможно.

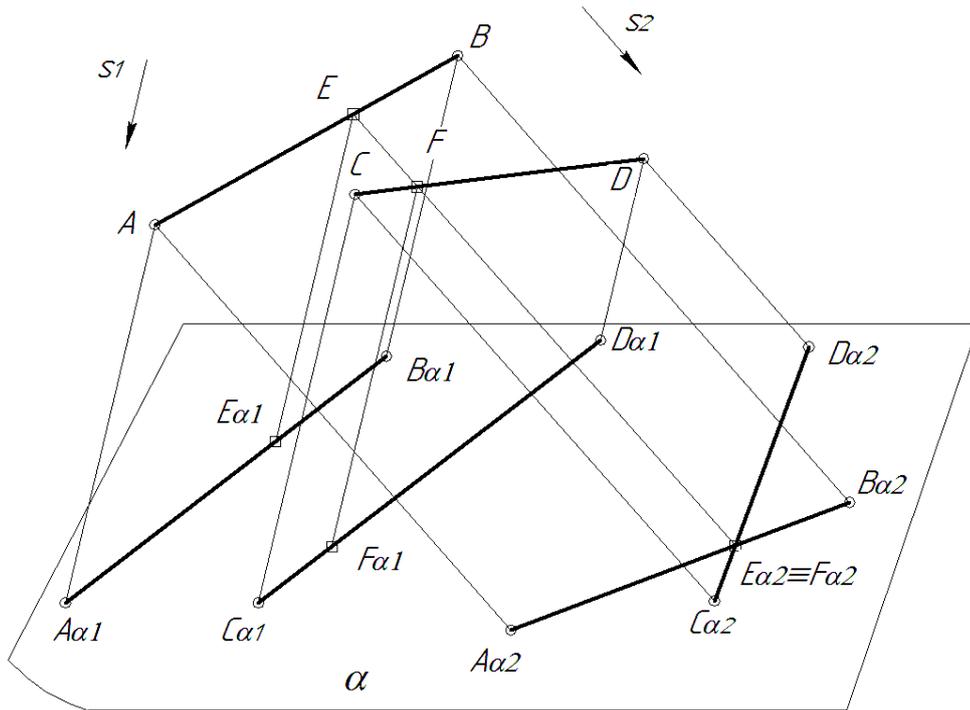


Рис. 1.11

1.4. Прямоугольное (ортогональное) проецирование

Частным случаем параллельного проецирования, при котором направление проецирования s перпендикулярно плоскости проекций, называется *прямоугольным*, или *ортогональным* (рис. 1.12).

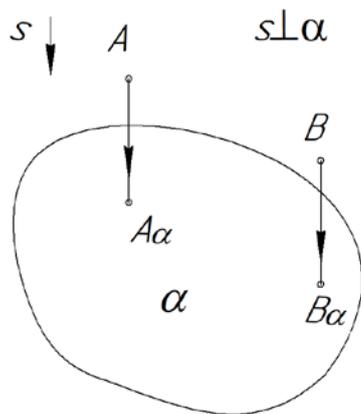


Рис. 1.12

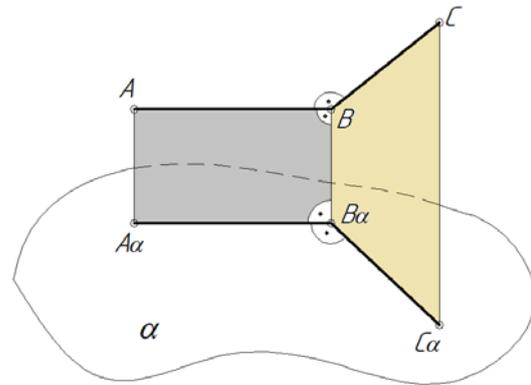


Рис. 1.13

Рассмотрим теорему о проецировании прямого угла.

Теорема: прямой угол проецируется на плоскость проекций без искажения, если одна сторона этого угла параллельна плоскости проекций, а вторая сторона не перпендикулярна ей (плоскости проекций).

На чертеже (рис. 1.13) показано, что угол при точке B – прямой, сторона AB параллельна плоскости проекций, сторона BC не перпендикулярна α . Четырехугольник $ABV\alpha A\alpha$ прямоугольный. Отрезок AB перпендикулярен к проецирующей плоскости $CBV\alpha C\alpha$, так как он перпендикулярен двум пересекающимся линиям, принадлежащим этой плоскости ($AB \perp BC$ по условию, $AB \perp BV\alpha$ по ортогональному проецированию).

У ортогонального проецирования есть два преимущества перед центральным и параллельным (косоугольным) проецированием:

- 1) простота геометрических построений при определении проекций;
- 2) возможность при определенных условиях получить на проекциях форму и размеры проецируемой фигуры.

2. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ МОДЕЛЬ КООРДИНАТНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ, ПОЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Угловые пространства

Положение любой точки в пространстве может быть определено, если будет задана координатная система. Удобной для этой цели является декартова система координат. На рис. 2.1 представлен ее макет, в котором обозначены: π_1 – горизонтальная плоскость проекций; π_2 – фронтальная плоскость проекций; π_3 – профильная плоскость проекций. Линии пересечения плоскостей оси координат: x, y, z . Точка O – начало координат.

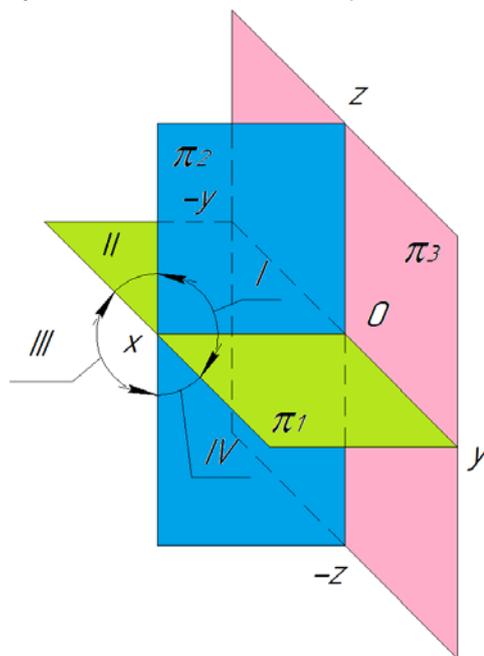


Рис. 2.1

Рассмотрены только положительные значения по оси x , поэтому видны 4-гранные углы (при отрицательных значениях x таких углов будет 8).

Знаки координат в угловых пространствах:

Угловое пространство	x	y	z
<i>I</i>	+	+	+
<i>II</i>	+	–	+
<i>III</i>	+	–	–
<i>IV</i>	+	+	–

Судить о принадлежности точки определенному угловому пространству можно исходя из знаков координат, например: $K(25; -15; -10)$ принадлежит III угловому пространству, точка $N(15; 30; -45)$ располагается в IV углу, $L(10; 20; 35)$ расположена в углу I и точка $M(35; -40; 5)$ принадлежит угловому пространству II.

2.2. Наглядное изображение точки в пространстве и ее эюр (ортогональный чертеж)

Рассмотрим положение точки A в первом угловом пространстве и ее проекции. Пусть координаты точки будут следующими: $A(30; 40; 20)$ (рис. 2.2).

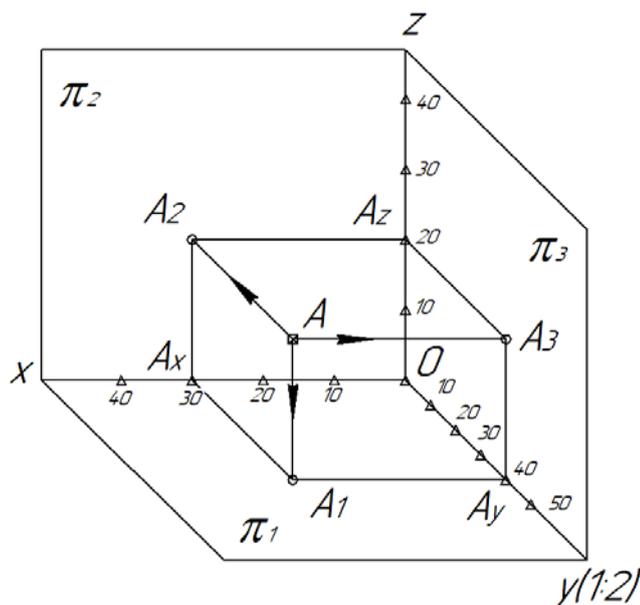


Рис. 2.2

При проецировании точки A на три плоскости проекций горизонтальная проекция точки $A-A_1$ оказывается на пересечении двух координат: A_x и A_y ; фронтальная проекция A_2 на пересечении A_x и A_z ; профильная проекция A_3 на пересечении координат A_y и A_z .

Использовать наглядное изображение положения точки в пространстве в качестве чертежа неудобно из-за громоздкости чертежа и искажения расстояния по координате y на π_1 и π_3 . Поэтому вместо наглядного изображения получается эюр точки A по методу французского ученого Гаспара Монжа (1746–1818).

Развернем плоскости проекций π_1 и π_3 до совмещения с π_2 . Мысленно разрежем пространственную конструкцию по оси y (рис. 2.3).

Используем две координаты точки: x и y – для построения горизонтальной проекции A_1 ; x и z – для построения фронтальной проекции A_2 ; y и z – для построения A_3 (профильной проекции точки A). Понятно, что координата y одинакова на π_1 и π_3 .

Очевидно, что наглядное изображение и эюр точки несут одинаковую информацию (взаимозаменяемую) о положении точки в пространстве.

Линия A_1A_2 называется *линией ортогональной связи* (ЛОС), она всегда перпендикулярна оси x , ЛОС A_2A_3 перпендикулярна оси z . ЛОС на чертеже строят сплошной тонкой линией, как и оси проекций.

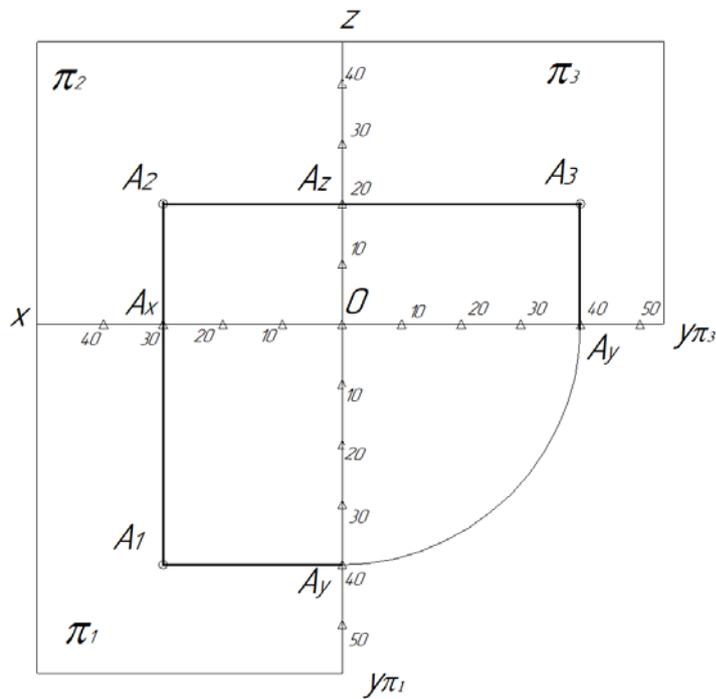


Рис. 2.3

Из эпюра видно, что для однозначного определения положения точки в пространстве необходимо и достаточно иметь две ее любые проекции. Таким образом необходимость присутствия на эпюре плоскости π_3 отпадает. Дальнейшую нашу работу в большинстве случаев ограничим двумя плоскостями проекций: π_1 – горизонтальной плоскостью и π_2 – фронтальной плоскостью проекций.

Найти третью проекцию по двум заданным и определить координаты точки B можно с помощью рис. 2.4.

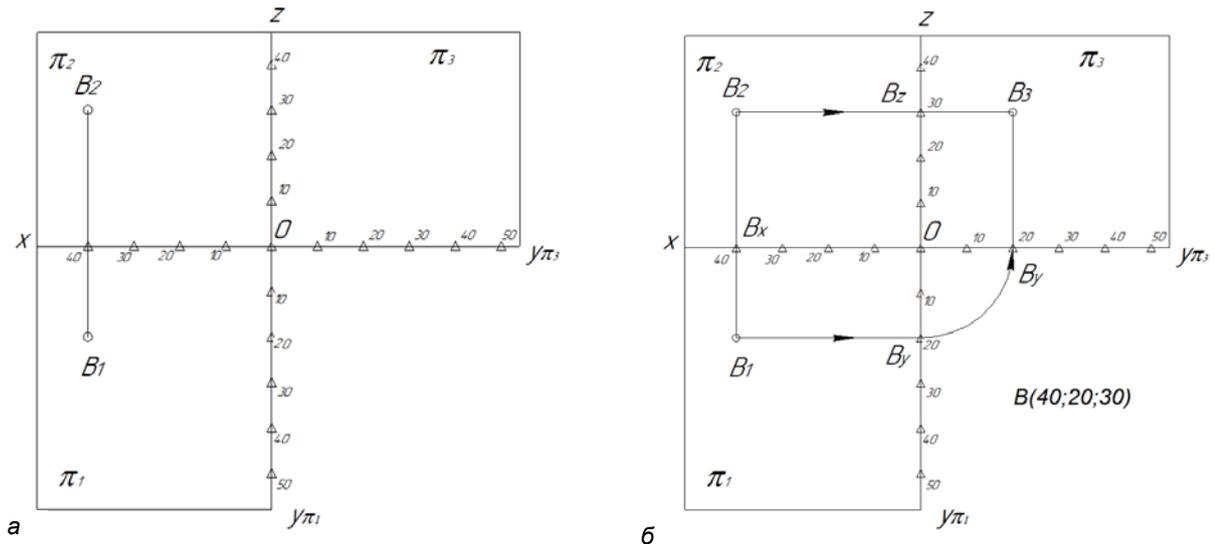


Рис. 2.4

Определим координаты точки B по осям: $B_x = 40$; $B_y = 20$; $B_z = 30$ (рис. 2.4, а). Перенесем B_y с π_1 на π_3 по дуге $R = 20$, с центром в начале координат в точке O . Пересечем координаты B_z и B_y на π_3 , получим профильную проекцию точки $B - B_3$ (рис. 2.4, б).

2.3. Положение точек на эпюре в зависимости от углового пространства

Совмещение плоскостей проекций с отрицательными координатами y и z показано на рис. 2.5.

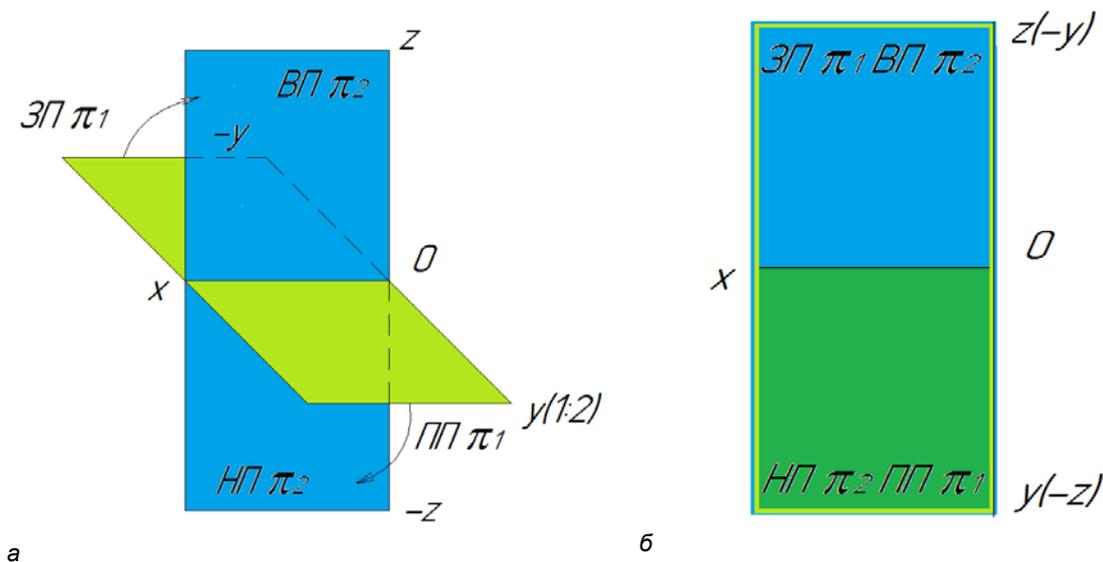


Рис. 2.5

На рис. 2.5, а дано наглядное изображение плоскостей в пространстве. Часть плоскости называют *полой*, различают следующие полы:

- $ПП\pi_1$ – передняя пола горизонтальной плоскости проекций;
- $ЗП\pi_1$ – задняя пола горизонтальной плоскости проекций;
- $ВП\pi_2$ – верхняя пола фронтальной плоскости проекций;
- $НП\pi_2$ – нижняя пола фронтальной плоскости проекций.

При совмещении $ЗП\pi_1$ поднимается вверх и совмещается с $ВП\pi_2$, $ПП\pi_1$ опускается вниз к $НП\pi_2$. Таким образом совмещаются на эпюре (ортогональном чертеже) отрицательная координата y и положительная координата z , а положительная координата y совпадает с отрицательной координатой z (рис. 2.5, б).

На угловых пространствах при взгляде со стороны оси x (рис. 2.6, а), в каждом угловом пространстве возьмем точки (без учета конкретной координаты по оси x) и посмотрим на положение их горизонтальных и фронтальных проекций на эпюре относительно оси x (рис. 2.6, б).

Если точка расположена в первом угловом пространстве, то фронтальная проекция 1_2 расположена выше оси x , горизонтальная проекция 1_1 ниже оси; для второго углового пространства видно, что обе проекции 2_2 и 2_1 получились выше оси; для третьего углового пространства действительно 3_1 выше оси x , 3_2 – ниже; точка, принадлежащая четвертому угловому пространству, на эпюре отображается своими проекциями 4_2 и 4_1 ниже оси x . Так по расположению проекций на эпюре можно легко определить, в каком угловом пространстве она находится.

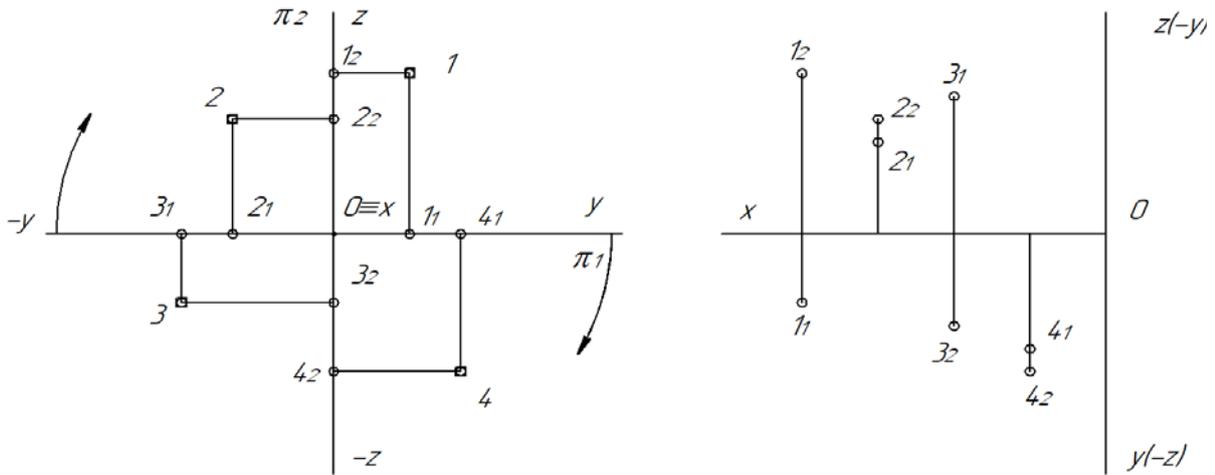


Рис. 2.6

Для определения положения точек в пространстве исходя из их эпюра можно рассмотреть рис. 2.7, на котором указано, что точки расположены в следующих углах: $F \in III$ $T \in IV$ $R \in II$ $P \in I$.

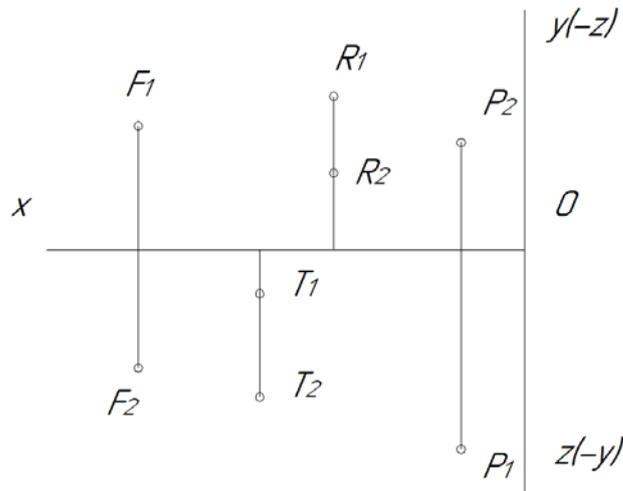


Рис. 2.7

2.4. Бессекторные плоскости и их свойства

Бессекторными называют плоскости, пересекающие ось x и проходящие под углом 45° к π_1 и π_2 . Плоскость, проходящую через I и III угловые пространства, называют *плоскостью симметрии* – σ -*сигма* (рис. 2.8, а), через II и IV – *плоскостью тождества* – τ (тау) (рис. 2.8, б).

Если со стороны оси x посмотреть на бессекторные плоскости и взять точки, принадлежащие им (без привязки к конкретным координатам по оси x), то можно увидеть, как эти точки отобразятся на эпюре (рис. 2.9).

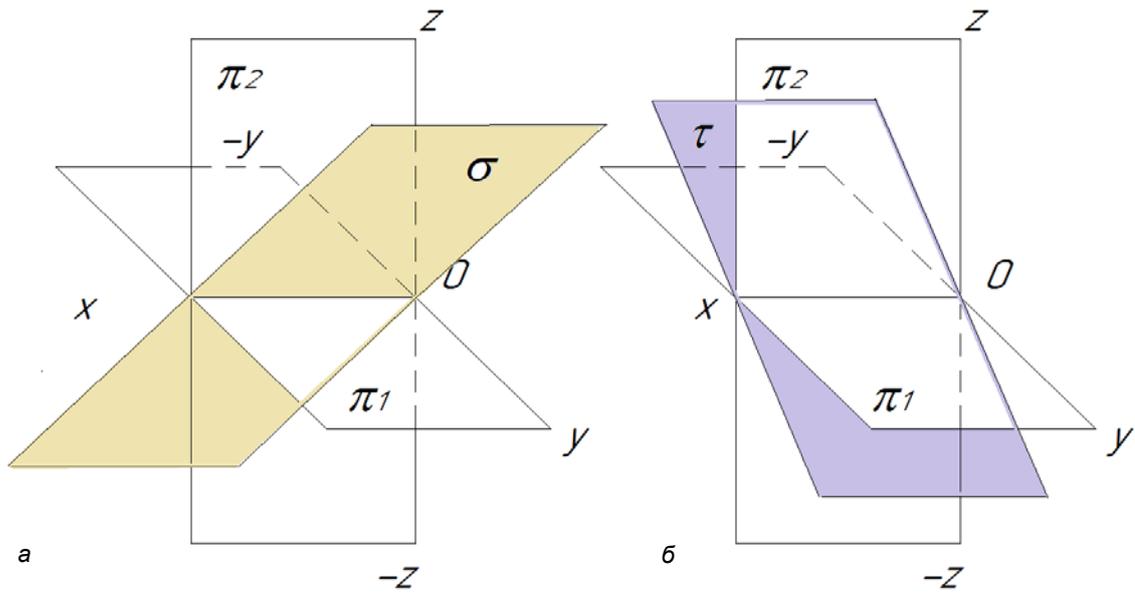


Рис. 2.8

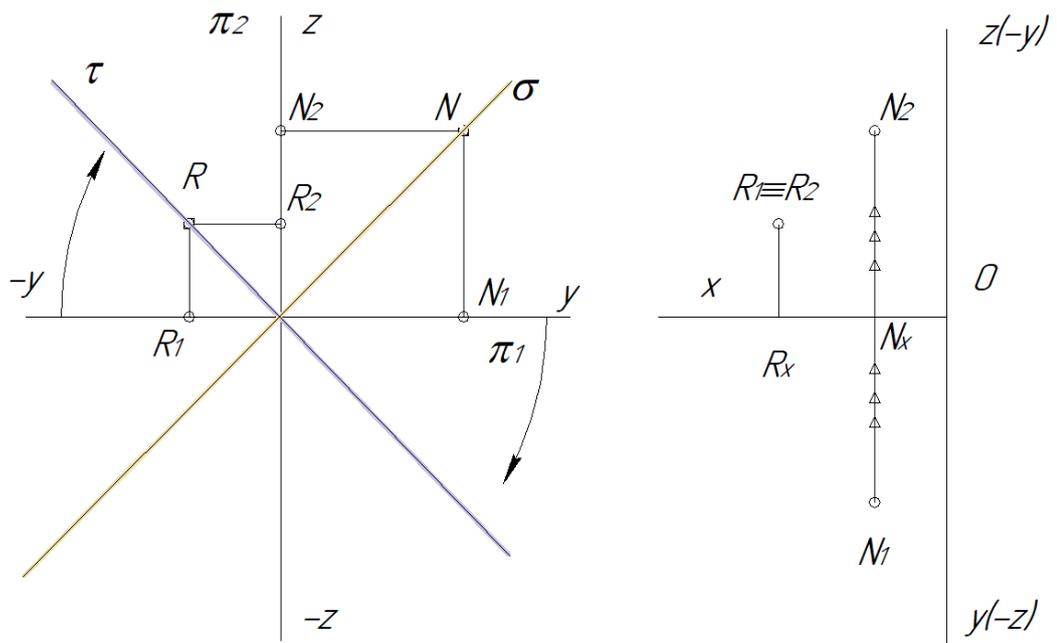


Рис. 2.9

Точка $N \in \sigma$ – плоскости симметрии, проекции точки N на эпюре отобразились *симметрично* относительно оси x : расстояние от N_x до N_2 равно расстоянию от N_x до N_1 . *Симметричность* отображения проекций на эпюре – это свойство элементов, принадлежащих плоскости *симметрии*.

Точка $R \in \tau$ – плоскости тождества, на эпюре ее проекции совпали, $R_1 = R_2$. *Взаимное совпадение* проекций на эпюре – свойство элементов, принадлежащих плоскости *тождества*.

3. ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

3.1. Прямые общего положения, истинная величина отрезка и углы наклона к плоскостям проекций

Прямые, произвольно расположенные по отношению к плоскостям проекций (не параллельные и не перпендикулярные плоскостям проекций), называют *прямыми общего положения*. Наглядное изображение отрезка прямой общего положения AB показано на рис. 3.1, а его эпюр – на рис. 3.2.

На рис. 3.1 точка F принадлежит плоскости проекций π_2 , точка H – плоскости проекций π_1 . От F до H проходит прямая l общего положения. На ней возьмем произвольный отрезок AB , спроецируем прямую и отрезок на плоскости проекций. Покажем углы наклона отрезка AB к плоскостям проекций: к горизонтальной плоскости проекций π_1 – φ° ; ко фронтальной плоскости проекций π_2 – ψ° .

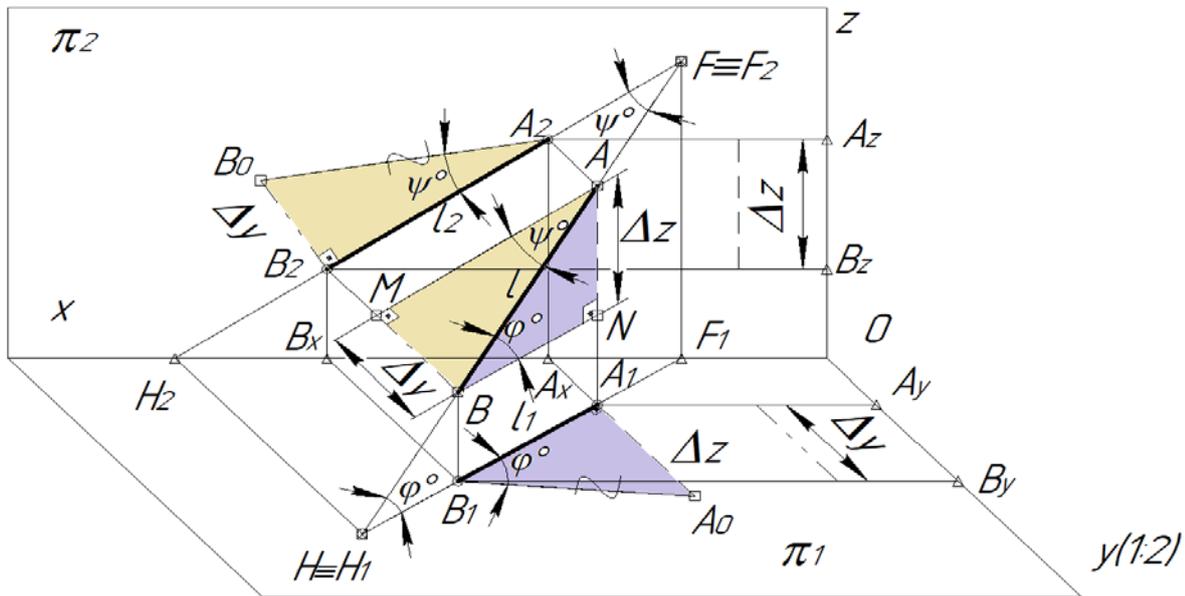


Рис. 3.1

Через точку B проведем отрезок BN , параллельный горизонтальной проекции A_1B_1 . Получим прямоугольный треугольник ABN . В этом треугольнике AB – истинная величина отрезка, катет BN равен горизонтальной проекции отрезка A_1B_1 , а второй катет равен превышению Δz точки A над точкой B . Получается, на горизонтальной проекции можно построить треугольник $B_1A_1A_0$, конгруэнтный ABN . Катет этого треугольника A_1A_0 равен Δz , снятой на фронтальной проекции от A_2 до B_2 , гипотенуза B_1A_0 равна истинной длине AB , угол между горизонтальной проекцией и истинной величиной отрезка (при B_1) равен углу наклона к горизонтальной плоскости проекций π_1 – φ° . Строить прямоугольный треугольник на горизонтальной плоскости проекций можно при A_1 , или при B_1 . Прикладывать Δz вверх или вниз тоже не имеет значения. Строим любой из четырех возможных вариантов. Значение истинной величины отрезка на эпюре будем показывать знаком \sim (рис. 3.1).

Через точку A можно провести линию, параллельную фронтальной плоскости проекций A_2B_2 , получится еще один прямоугольный треугольник AMB . В нем гипотенуза AB – истинная величина отрезка, катет AM равен его фронтальной проекции A_2B_2 , второй катет MB равен разнице приближений между точками A и B Δy . Также на фронтальной плоскости проекций можно построить треугольник $A_2B_2B_0$, конгруэнтный прямоугольному треугольнику AMB . Один катет прямоугольного треугольника – это фронтальная проекция отрезка AB , второй катет равен Δy (насколько

точка B ближе к наблюдателю, чем точка A). Размер можно снять на горизонтальной проекции от A_y до B_y . Гипотенуза этого прямоугольного треугольника равна истинной длине отрезка $|AB|$. Угол между натуральной величиной и его фронтальной проекцией есть угол наклона отрезка AB ко фронтальной плоскости проекций $\pi_2 - \psi^\circ$. Для построения прямоугольного треугольника следует приложить Δy под прямым углом хоть к B_2 , хоть к A_2 , вверх или вниз – не имеет значения. У отрезков общего положения углы наклона к плоскостям проекций φ° и ψ° между собой никак не связаны.

Изобразим проекции отрезка AB на эпюре рис. 3.2 (все необходимые координаты снимем с наглядного изображения на рис. 3.1).

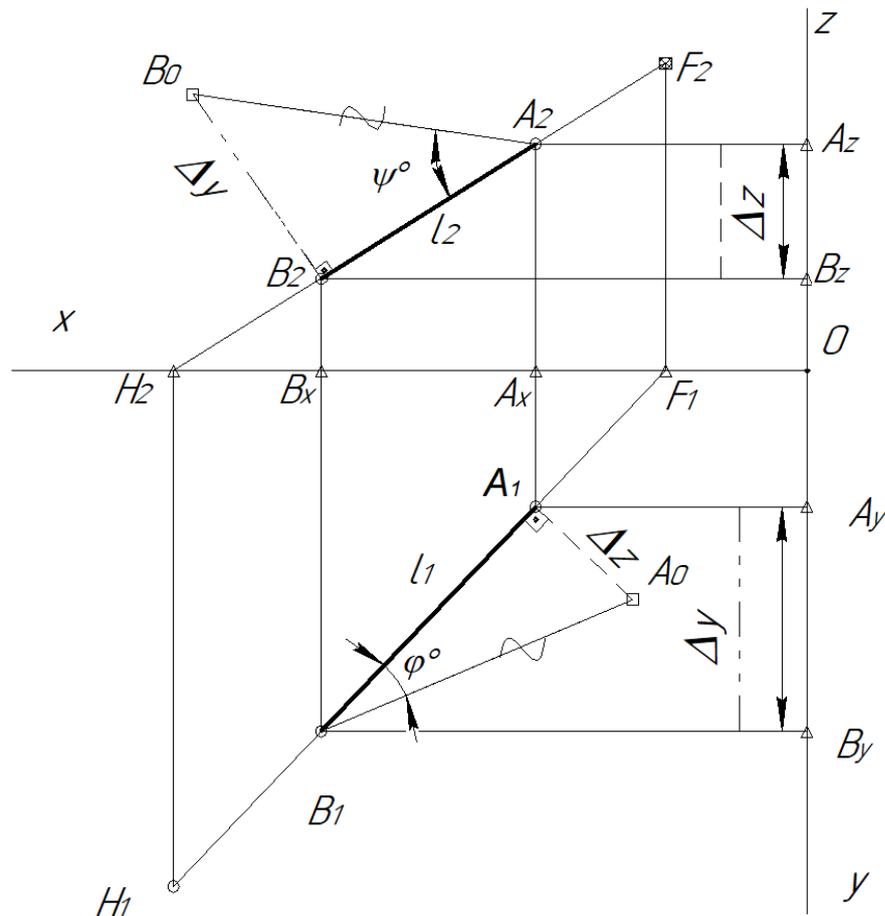


Рис. 3.2

Имея проекции отрезка общего положения, можно определить его истинную длину $|AB|$ и углы наклона к плоскостям проекций φ° и ψ° . Значения Δy и Δz , для удобства, показаны разными типами линий: штриховой показано значение Δz , пунктирной с двумя точками показано Δy . Все построения, кроме проекций отрезков, выполнены тонкими линиями. Вспомогательные точки называют той буквой, к чьей проекции прикладывают Δ под прямым углом (это A_0 , B_0 или A^*_0 и B^*_0 , если дважды использованы проекции одной точки). Численные значения углов, как правило, не нужны – только обозначения.

В прямоугольном треугольнике на фронтальной проекции $A_2B_2B_0$ гипотенуза $|A_2B_0| = |AB|$, угол между фронтальной проекцией A_2B_2 и истинной величиной $|A_2B_0|$ равен углу наклона отрезка AB ко фронтальной плоскости проекций $\pi_2 - \psi^\circ$. В прямоугольном треугольнике на горизонтальной проекции $B_1A_1A_0$ гипотенуза $|B_1A_0| = |AB|$, угол между горизонтальной проекцией и истинной

величиной отрезка в пространстве равен углу наклона отрезка к горизонтальной плоскости проекций $\pi_1 - \varphi^\circ$.

При определении натуральной величины отрезка $|AB|$ и углов его наклона φ° и ψ° положение оси x не имеет никакого значения, именно поэтому в дальнейшем она изображена не будет, но следует помнить что проходит она всегда горизонтально (на это часто будем ссылаться, говоря о параллельности *воображаемой оси x*). Гипотенузы прямоугольных треугольников должны быть равными, так как определяют истинную величину отрезка. Данный способ определения истинных величин, длин отрезков прямых и углов наклона к плоскостям называется *методом прямоугольного треугольника*. В дальнейшем при решении различных задач этот метод будет очень активно использоваться.

Ниже приведена задача на определение натуральной величины отрезка $|CD|$ и углов его наклона к плоскостям проекций φ° и ψ° (рис. 3.3, а).

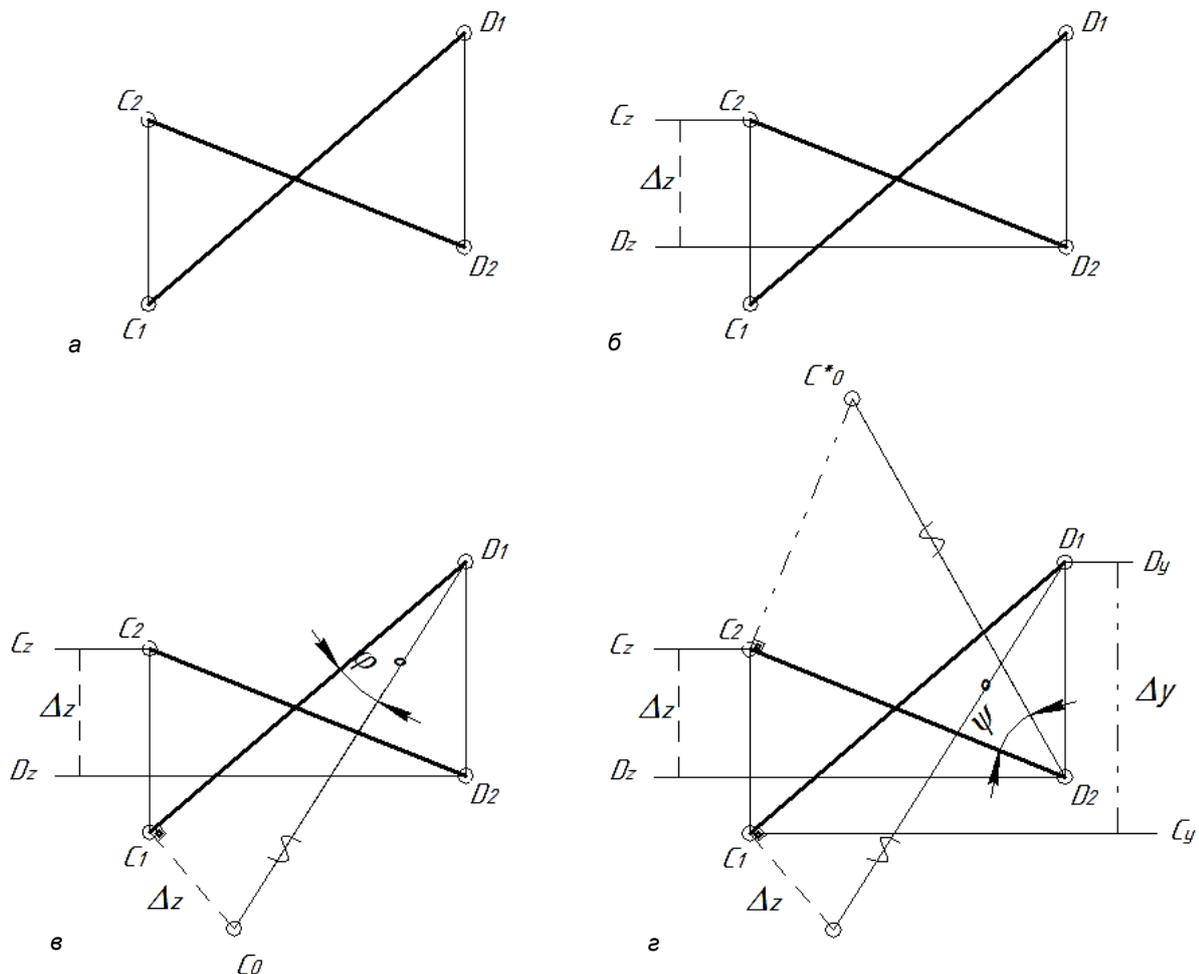


Рис. 3.3

По заданному эпюру определим координаты z точек CD (рис. 3.3, б), снимем разницу Δz , приложим Δz под прямым углом к горизонтальной проекции отрезка C_1D_1 к C_1 . Построим прямоугольный треугольник при горизонтальной проекции $D_1C_1C_0$ (рис. 3.3, в). В нем гипотенуза $|D_1C_0| = |CD|$, угол при $D_1 = \varphi^\circ$ – это угол наклона отрезка к горизонтальной плоскости проекций. Определим Δy между горизонтальными проекциями C_1D_1 (рис. 3.3, г), построим второй прямо-

угольный треугольник при фронтальной проекции C_2D_2 , приложив Δu под прямым углом ко фронтальной проекции точки C . Получим $|D_2 C^* O| = |CDI|$, угол при $D_2 = \varphi^\circ$ – это угол наклона отрезка ко фронтальной плоскости проекций.

Такая задача называется *прямой*. Есть обратные задачи. Например, по заданному условию.

Задача 3.1. Достройте недостающую проекцию отрезка EF , если известен угол его наклона $\varphi^\circ = 30^\circ$ (рис. 3.4). Сколько решений имеет задача?

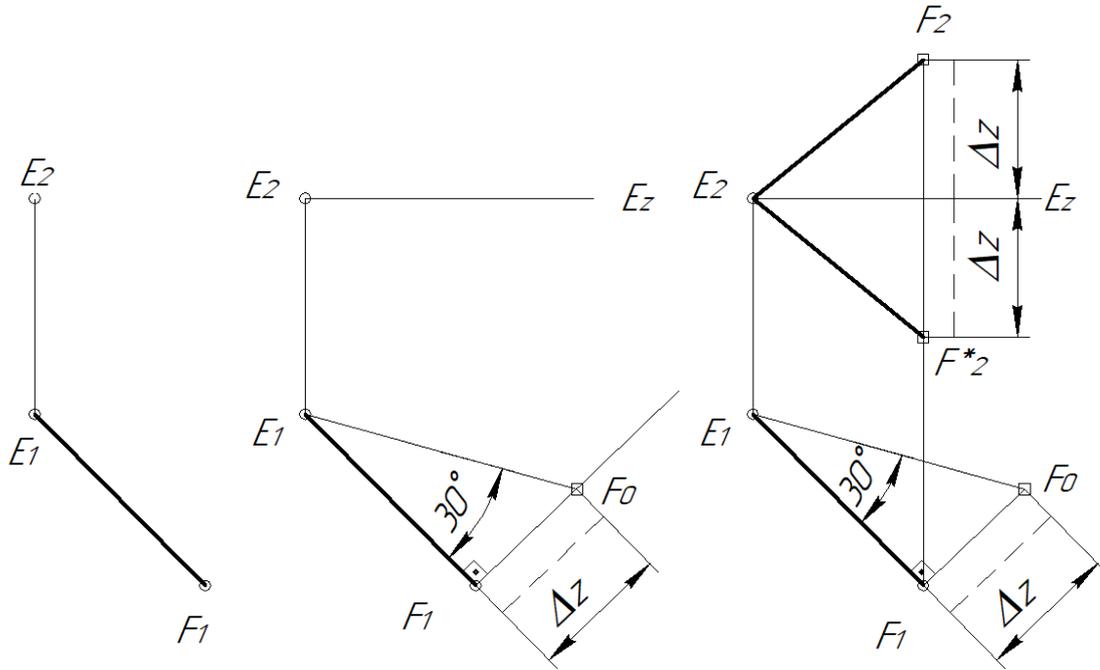


Рис. 3.4

Решение.

Задачу решим поэтапно. Зная, что угол наклона отрезка EF к горизонтальной плоскости равен 30° , построим прямоугольный треугольник при горизонтальной проекции. Из F_1 опустим перпендикуляр, а при горизонтальной проекции E_1 отложим угол 30° . Получим гипотенузу $|E_1 F_0| = |EF|$, равную истинной величине отрезка, и катет $F_1 F_0 = \Delta z$. От известной координаты z точки E на фронтальной проекции по линии ортогональной связи, идущей из F_1 , отложим вниз и вверх значение Δz , получатся два возможных положения фронтальной проекции точки: $F - F^*_2$ и F_2 .

Задача имеет два решения.

3.2. Взаимное положение прямых в пространстве и их отображение на эюре

Две любые прямые в пространстве могут быть параллельными, пересекающимися или скрещивающимися.

Параллельные прямые на эюре всегда отображаются параллельными на обеих проекциях: на горизонтальной плоскости π_1 и на фронтальной плоскости проекций π_2 (рис. 3.5, а).

Пересекающиеся прямые отображаются пересекающимися (рис. 3.5, б). Проекции точки пересечения лежат на одной линии ортогональной связи.

Скрещивающиеся прямые могут отображаться на одной проекции как параллельные, на другой – пересекающимися (рис. 3.5, в).

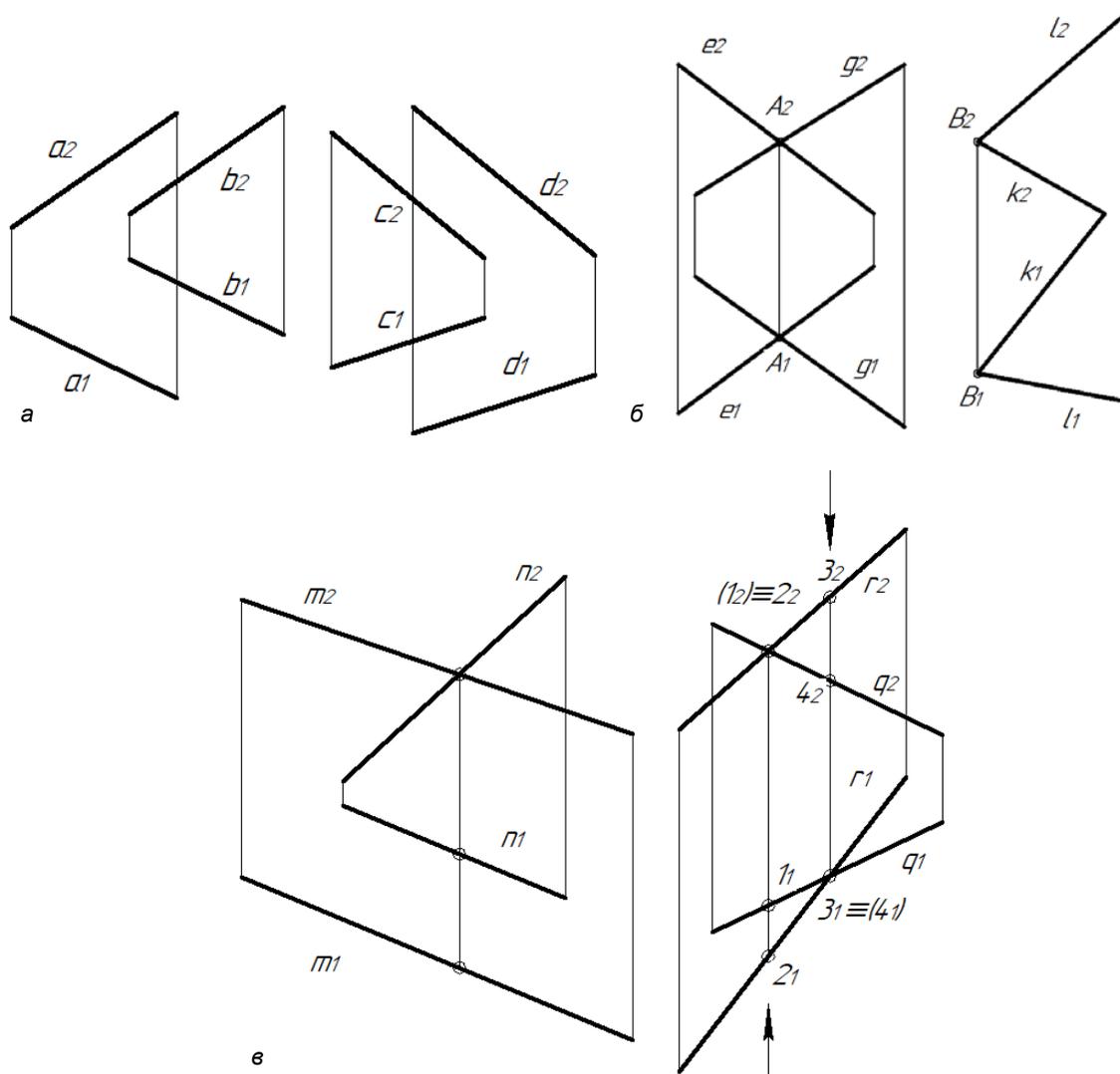


Рис. 3.5

На рис. 3.5, в показаны конкурирующие точки и их видимость. *Конкурирующими* называют точки с двумя одинаковыми координатами и отличающейся третьей.

Точки 1 2 конкурируют на фронтальной проекции π_2 , точки 3 4 конкурируют на горизонтальной проекции π_1 . Координата y точки 2 больше координаты y точки 1 ($2_y > 1_y$), поэтому на фронтальной проекции видна точка 2, а проекция точки 1 не видна. Координата z точки 3 больше координаты z точки 4 ($3_z > 4_z$), поэтому на π_1 не видно горизонтальную проекцию точки 4. Невидимые проекции точек возьмем в скобки, взгляд наблюдателя покажем со стороны координатных осей.

Конкурирующие точки будут использованы в дальнейшем для определения видимости при решении задач.

3.3. Линии уровня

Линии уровня – линии, параллельные какой-либо плоскости проекций.

3.3.1. Горизонтальные прямые

Горизонтальная прямая – это линия, параллельная горизонтальной плоскости проекций π_1 .

Наглядное изображение и эпюр любой горизонтальной прямой h (чаще всего буквой h обозначают любую горизонтальную прямую, но иногда в задачах (название ее может быть другим) показано на рис. 3.6.

По наглядному изображению на рис. 3.6, а видно, что линия 12 проецируется на горизонтальную плоскость проекций без искажения: $|12| = |1_1 2_1|$, так как параллельна π_1 , угол наклона $\varphi^\circ = 0^\circ$, а угол наклона ψ° проецируется на горизонтальную плоскость проекций π_1 без искажения. Это угол между горизонтальной проекцией, горизонтальной прямой h_1 и линией, параллельной воображаемой оси x . На эпюре (рис. 3.6, б) видим одинаковую координату z у точек 1 и 2, или $h_2 \parallel O_x$. Основываясь на этом положении, можно сделать вывод, что линия h параллельна π_1 .

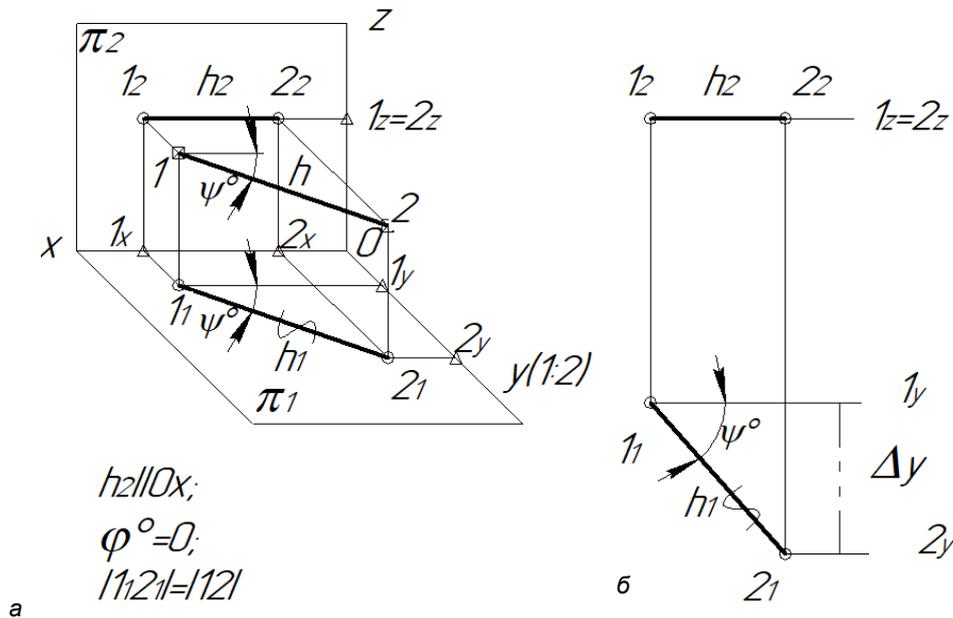


Рис. 3.6

На рис. 3.7 показаны произвольные положения различных горизонтальных прямых a , b , и c .

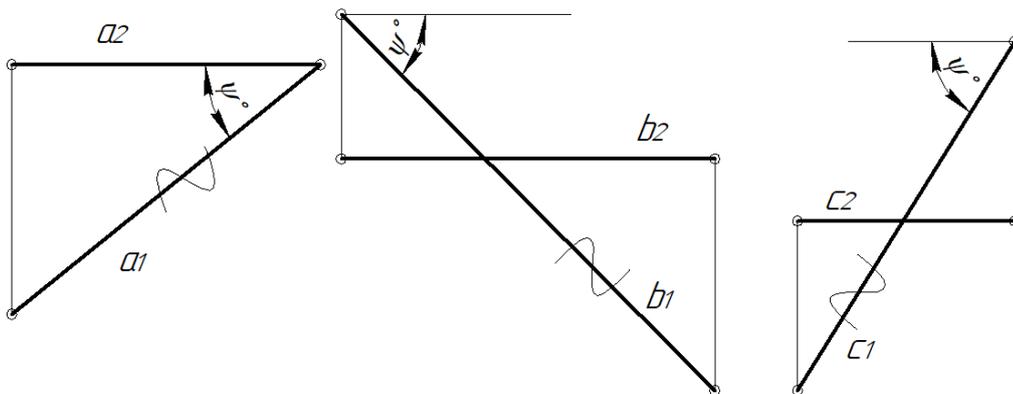


Рис. 3.7

Так как фронтальная проекция линии a имеет одинаковую высоту всех точек, т.е. $a_2 \parallel O_x$, следовательно, линия a параллельна горизонтальной плоскости проекций π_1 , а значит, угол ее наклона к горизонтальной проекции $\varphi^\circ = 0^\circ$. Проекция на π_1 равна истинной величине, а угол наклона ко фронтальной плоскости проекций $\pi_2 - \psi^\circ$ – это меньший угол между горизонтальной проекцией линии a и воображаемой осью x . Для линий b и c рассуждения будут аналогичными.

Задача 3.2. Определите расстояния от точки пространства M до заданной линии h (рис. 3.8, а).

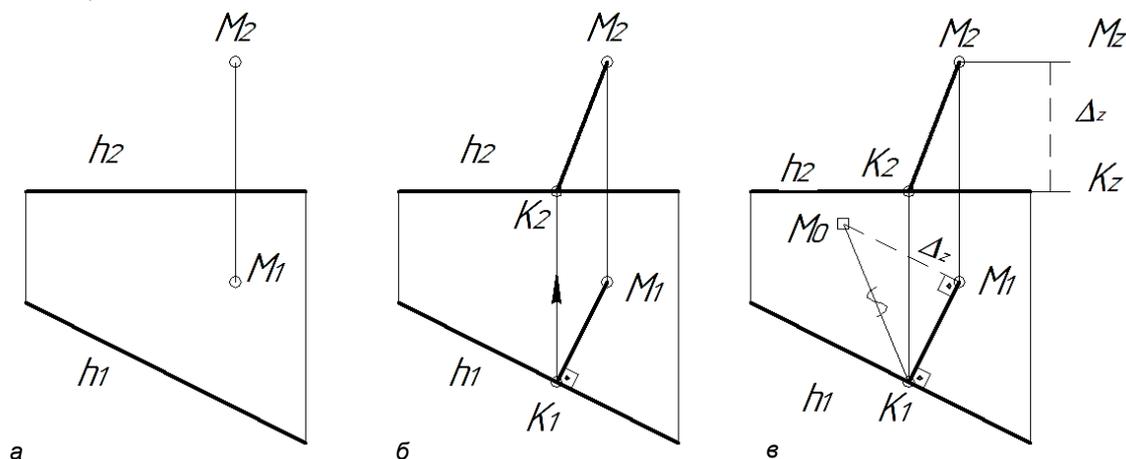


Рис. 3.8

Решение.

При определении расстояния от точки M до линии h следует опустить перпендикуляр из M к h : $MK \perp h$. Точка K должна принадлежать линии h , и возникает вопрос: $\angle MKI = ?$

Определим положение линии h в пространстве, исходя из ее эпюра. Так как координаты z всех точек линии h одинаковы $h_2 \parallel O_x$, делаем вывод о параллельности $h \parallel \pi_1$. Наша линия – горизонтальная прямая. По теореме *проецирования прямого угла* прямой угол отобразится на π_1 без искажения, так как $h \parallel \pi_1$, т.е. $M_1K_1 \perp h_1$ (рис. 3.8, б).

Покажем фронтальную проекцию точки $K - K_2$ по линии ортогональной связи, из условия ее принадлежности линии h . И определим натуральную величину $\angle MKI$ *методом прямоугольного треугольника*. Снимем Δz между фронтальными проекциями M и K , приложим Δz под прямым углом к горизонтальной проекции M_1K_1 , получим прямоугольный треугольник с гипотенузой $|K_1M_0| = \angle MKI$ (рис. 3,8, в).

3.3.2. Фронтальные прямые

Фронтальная прямая – прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций π_2 .

Рассмотрим наглядное изображение любой фронтальной прямой (чаще всего будем называть ее линией f). Так как линия параллельна π_2 , ее угол наклона ко фронтальной плоскости проекций $\psi^\circ = 0^\circ$, а угол наклона к горизонтальной плоскости проекций φ° виден при фронтальной проекции линии f без искажения (рис. 3.9).

На эпюре мы видим $Z_y = A_y$, т.е. $f_1 \parallel O_x$, а это значит, что сама линия f параллельна фронтальной плоскости проекций π_2 . На рис. 3.10 изображены различные положения линий, параллельных π_2 .

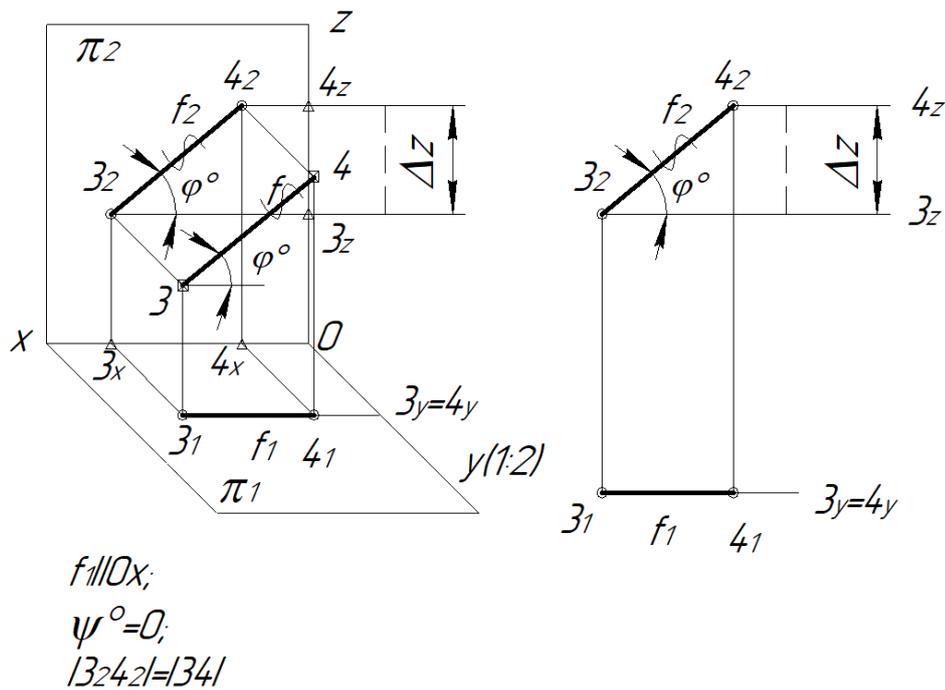


Рис. 3.9

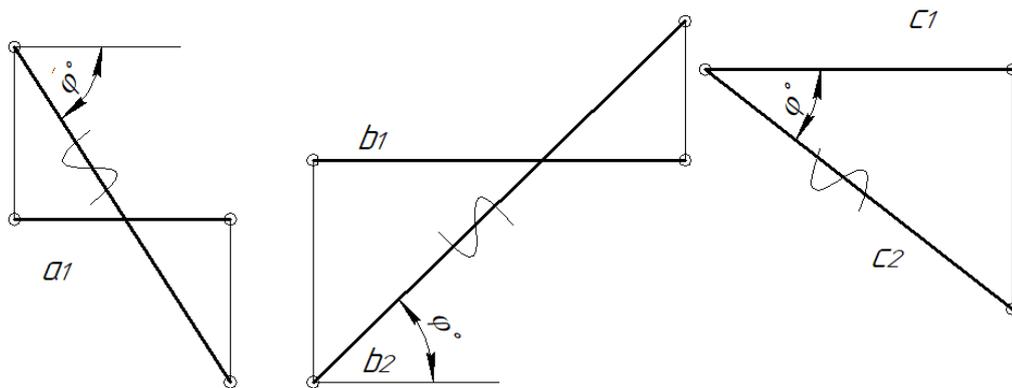


Рис. 3.10

Задача 3.3. Достройте недостающую проекцию точки M , если известно, что она удалена от линии f на 30 мм (рис. 3.11). Сколько решений имеет задача?

Решение.

Из точки пространства M следует опустить перпендикуляр на заданную линию f , получить основание перпендикуляра – точку K , принадлежащую линии f , расстояние $|MK| = 30$ мм.

Определим положение заданной линии f , исходя из ее эпюра. Так как горизонтальная проекция $f_1 \parallel OX$, сама линия $f \parallel \pi_2$, а значит, проекция прямого угла $MK \perp f$ видна на π_2 , т.е. $M_2 K_2 \perp f_2$. Находим на f_1 проекцию K_1 по линии ортогональной связи (рис. 3.11, б). Строим при фронтальной проекции $M_2 K_2$ прямоугольный треугольник с гипотенузой $K_2 M_0$ (используя дугу окружности радиуса 30 мм). В этом прямоугольном треугольнике катет $K_2 K_0$ равен Δy , каким он должен быть между M и K , если расстояние между этими точками 30 мм (рис. 3.11, в). От известного значения K_y по линии ортогональной связи, идущей из фронтальной проекции точки M вверх и вниз, отложим значение Δy . Получим два возможных решения задачи.

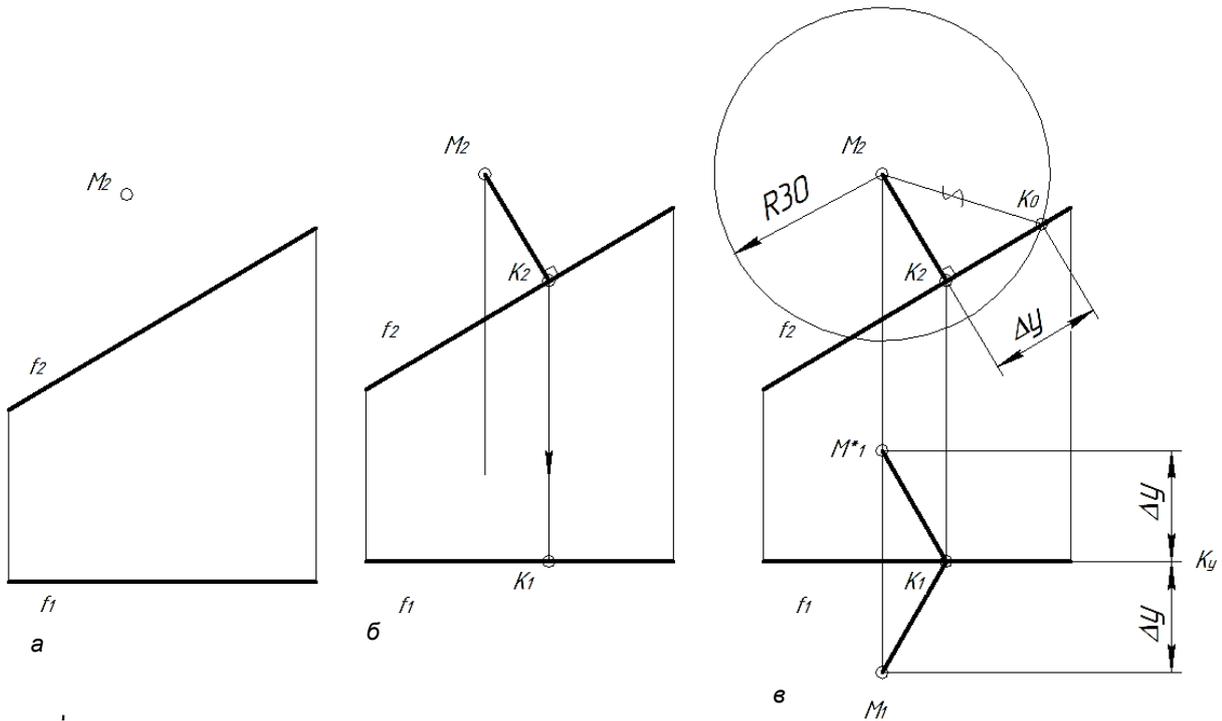


Рис. 3.11

3.3.3. Профильные прямые

Профильная прямая – прямая параллельная профильной плоскости проекций π_3 .

Рассмотрим наглядное изображение и эпюр отрезка профильной прямой AB (рис. 3.12), добавив на наглядном изображении плоскость проекций π_3 для удобства восприятия.

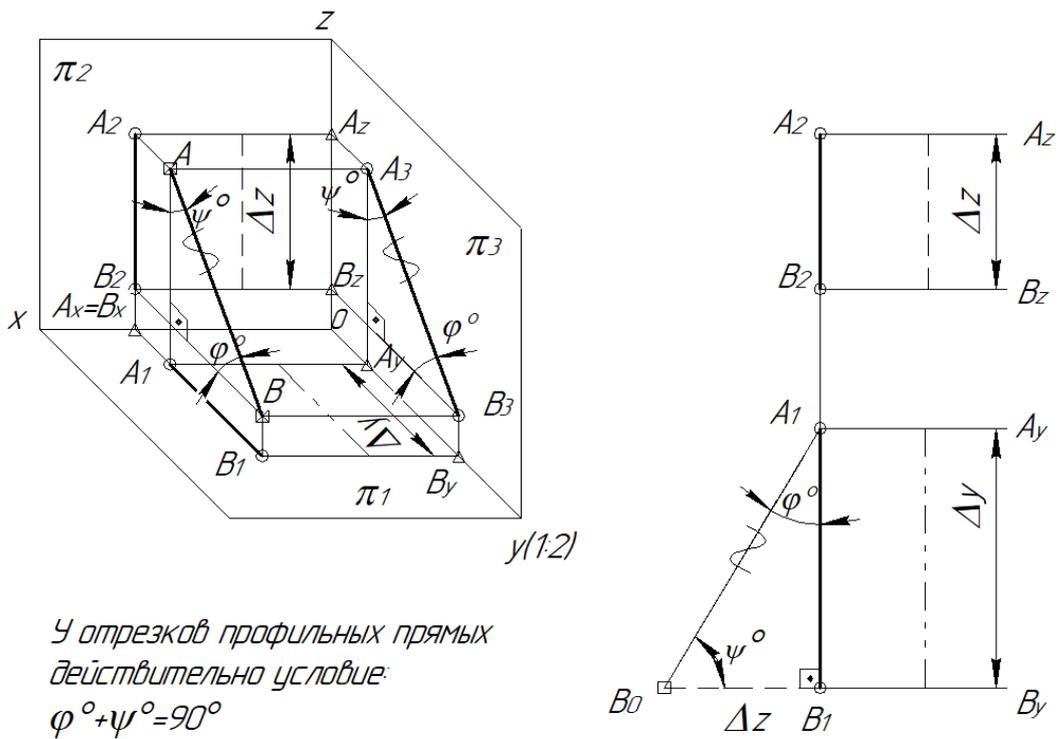


Рис. 3.12

Любой отрезок параллелен π_3 , если у его концов одинаковая координата x , т.е. $A_2B_2 \perp O_x$ и $A_1B_1 \perp O_x$. Из-за того, что сумма углов наклона отрезка к плоскостям проекций π_1 и π_2 ($\varphi^\circ + \psi^\circ \approx 90^\circ$), определять их можно, построив один прямоугольный треугольник или при горизонтальной, или при фронтальной проекции.

Следует помнить, что в системе плоскостей проекций π_2/π_1 – это отрезок общего положения. Для определения положения любой точки, принадлежащей такому отрезку по одной проекции, придется воспользоваться вспомогательным проецированием. Необходимо использовать не проекцию на π_3 , а любую вспомогательную плоскость π_0 (не параллельную данному отрезку) и метод косоугольного проецирования. Определим недостающую проекцию точки N , принадлежащую отрезку CD (рис. 3.13, а).

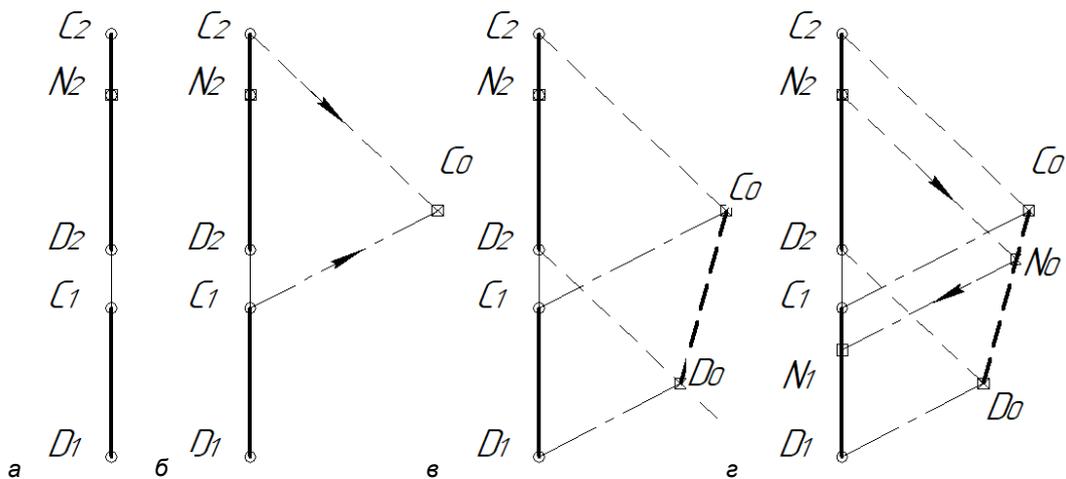


Рис. 3.13

Выполним косоугольное проецирование отрезка CD на любую плоскость π_0 , для этого соединим разноименные проекции точки C под любым углом, получим C_0 (рис 3.13, б). Проведя линии C_1C_0 и C_2C_0 , мы выбрали направление косоугольного проецирования. Точку D спроецируем согласно выбранному направлению: $D_1D_0 \parallel C_1C_0$ и $D_2D_0 \parallel C_2C_0$ (рис. 3.13, в). Последним шагом найдем N_0 , проведя $N_2N_0 \parallel C_2C_0$, $N_0 \in C_0D_0$, и по линии связи $N_0N_1 \parallel C_0C_1$ найдем недостающую горизонтальную проекцию N_1 точки $N \in CD$ (рис. 3.13, г).

Рассмотрим еще две задачи на использование метода косоугольного проецирования.

Задача 3.4. Определите взаимное положение отрезков MN и RT по их эпюру (отрезки могут быть в пространстве: пересекающимися, параллельными или скрещивающимися), как показано на рис. 3.14, а.

Решение.

Отрезки MN и RT лежат в разных плоскостях параллельных π_3 , поэтому пересекаться не могут. Проверить, параллельны они или скрещиваются, можно, выполнив косоугольное проецирование на любую вспомогательную плоскость π_0 (рис. 3.14, б). На чертеже видно, что косоугольная проекция M_0N_0 не параллельна R_0T_0 , значит, эти два отрезка скрещиваются в пространстве.

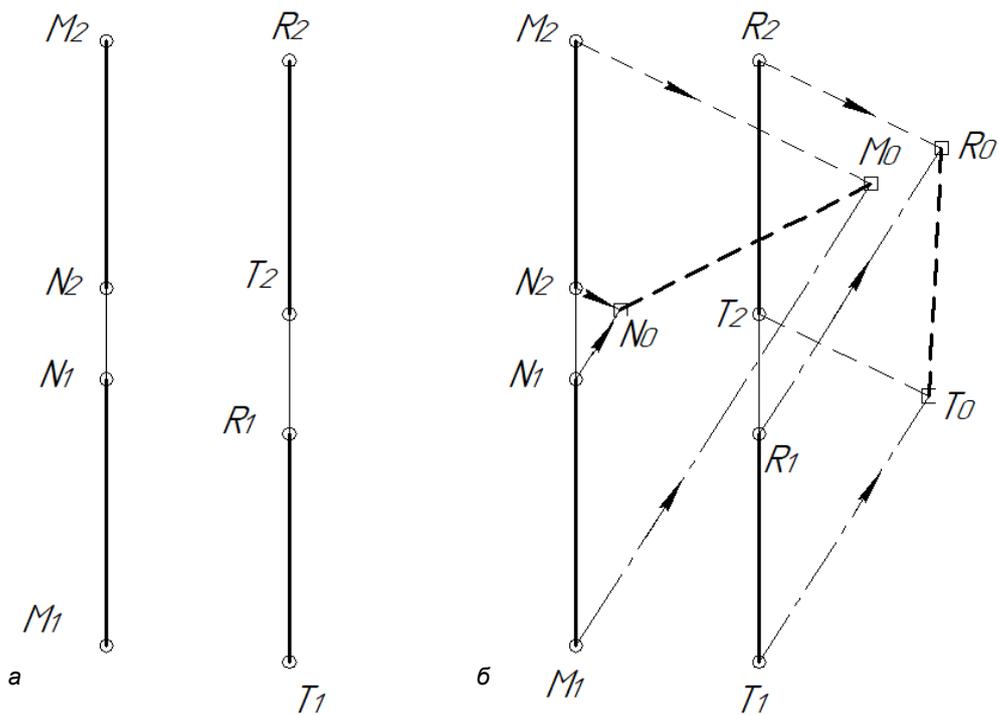


Рис. 3.14

Задача 3.5. Достройте недостающую проекцию отрезка KL , параллельного заданному отрезку EF (рис. 3.15, а).

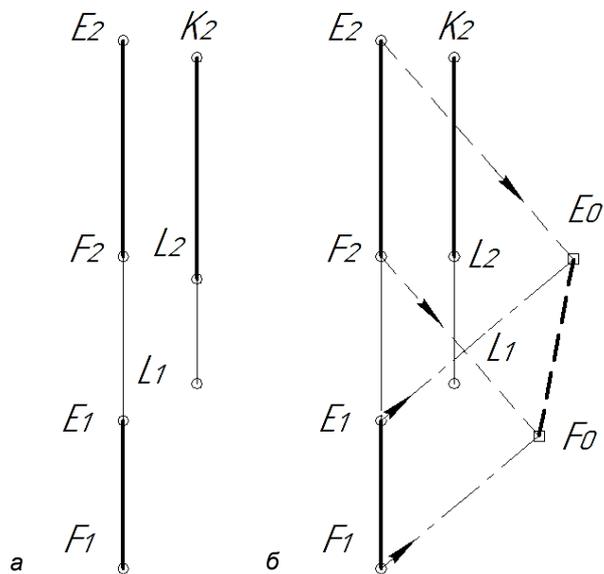


Рис. 3.15 (начало)

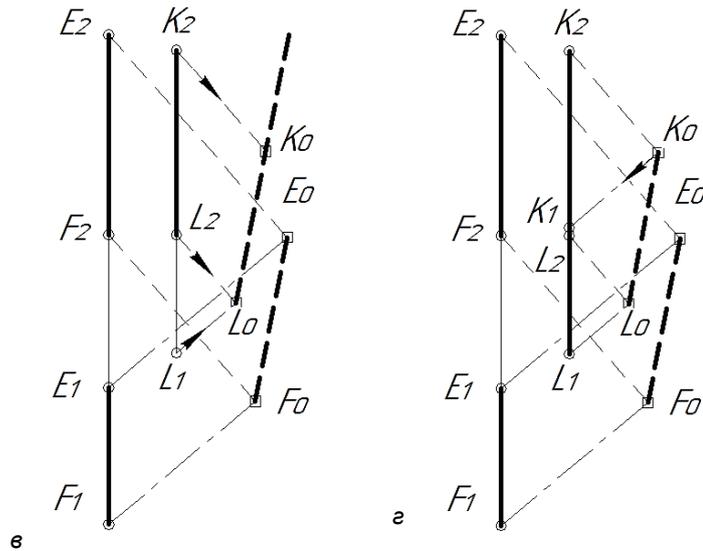


Рис. 3.15 (окончание)

Решение.

1. Выбираем произвольное направление косоугольного проецирования, проецируем EF на π_0 (рис. 3.15, б). Получаем косоугольную проекцию E_0F_0 .

2. Проецируем известную точку L на ту же плоскость π_0 , через L_0 проводим линию параллельную E_0F_0 так, чтобы линия связи, идущая из фронтальной проекции точки K , могла пересечь ее, получаем косоугольную проекцию K_0 (рис. 3.15, в).

3. Строим последнюю линию связи K_0K_1 , где K_1 находим на пересечении линии ортогональной связи, идущей из K_2 и линии косоугольного проецирования (рис. 3.15, в). Горизонтальную проекцию K_1L_1 прочерчиваем основной линией. Задача решена.

3.3.4. Линии, параллельные плоскости симметрии σ

Не будем рассматривать наглядные изображения этих линий, а покажем на эпюре, что исходя из свойств плоскости σ увидим симметричность проекций отрезков относительно любой горизонтальной линии (рис. 3.16).

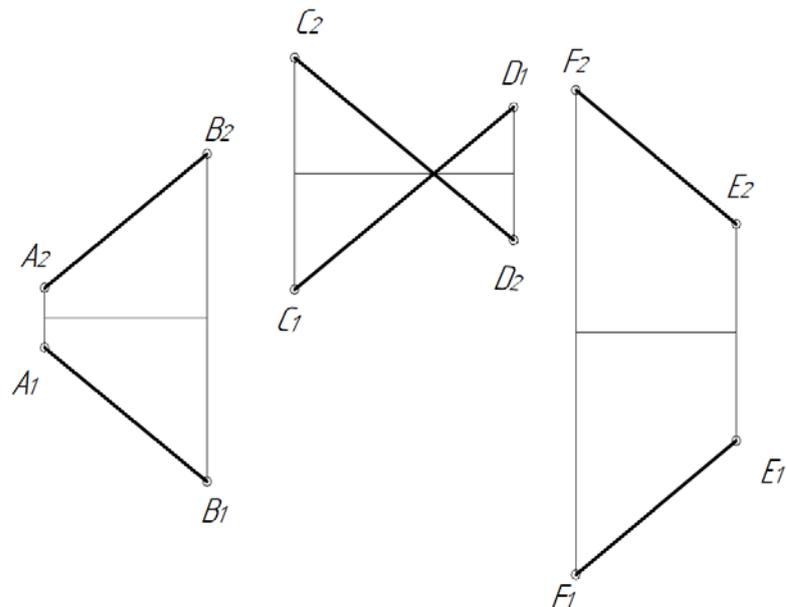


Рис. 3.16

3.3.5. Линии, параллельные плоскости тождества τ

Проекции прямых, параллельных плоскости тождества τ , изображены на рис. 3.16. Условием параллельности линии плоскости τ является взаимная параллельность проекций прямых: $m_1 \parallel m_2$, $n_1 \parallel n_2$, $l_1 \parallel l_2$ (рис. 3.17).

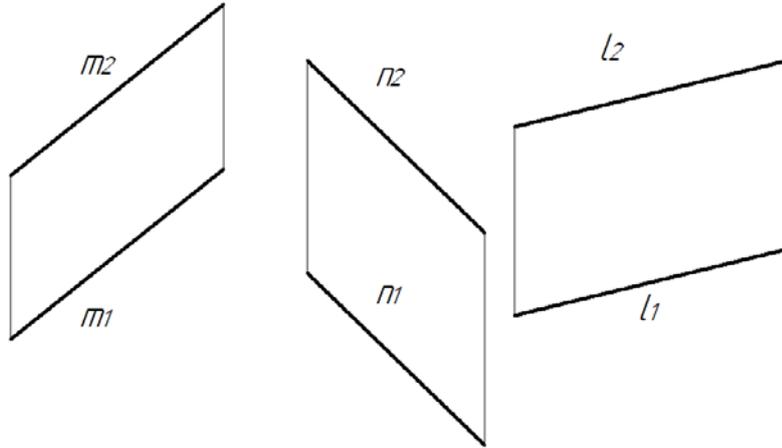


Рис. 3.17

3.4. Проецирующие прямые

Проецирующие прямые – это прямые, перпендикулярные какой-либо плоскости проекций.

3.4.1. Горизонтально-проецирующие прямые

Прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций, называется *горизонтально-проецирующей*.

Посмотрим наглядное изображение и эпюр линии $a \perp \pi_1$. Линия a не только перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, но и параллельна фронтальной и профильной плоскостям проекций: $a \parallel \pi_2$ и $a \parallel \pi_3$ (рис. 3.18).

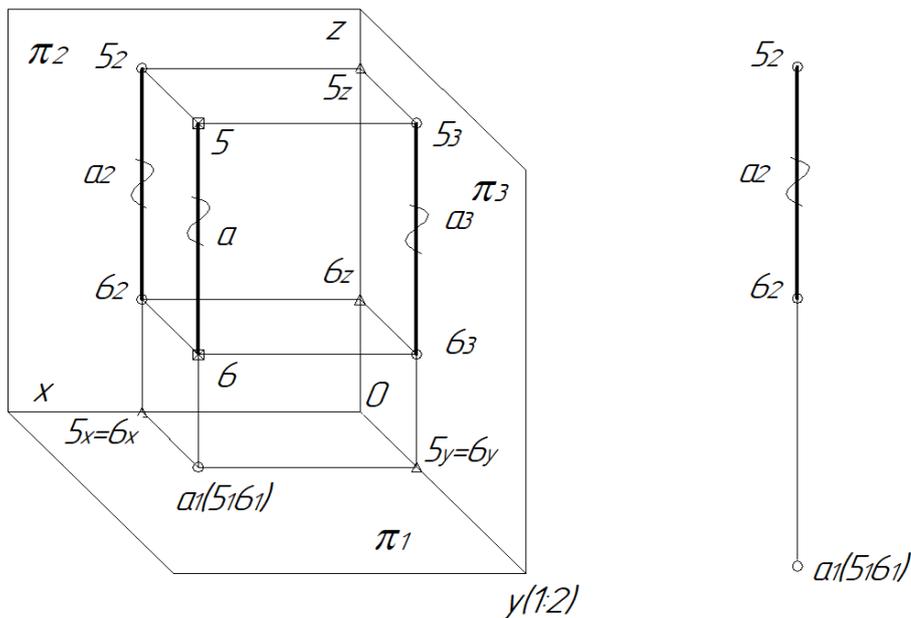


Рис. 3.18

У такой прямой горизонтальная проекция a_1 называется *вырожденной*, а фронтальная проекция a_2 перпендикулярна воображаемой оси x и отрезок $|5_2b_2|=|5b|$ равен своей натуральной величине. Угол $\varphi^\circ=90^\circ$, $\psi^\circ=0^\circ$.

Задача 3.6. Определите расстояние от точки M до линии b по заданному эпиюру (рис. 3.19, а).

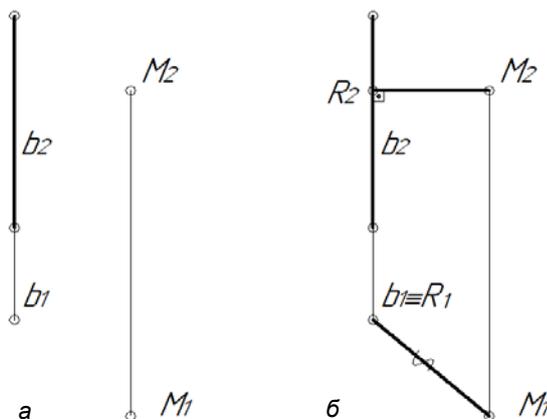


Рис. 3.19

Решение.

Из точки M опустим перпендикуляр к линии b . Основанием перпендикуляра будет точка R . Далее следует определить истинную величину отрезка MR .

На эпиюре (рис. 3.19, а) видно, что b_1 – вырожденная проекция линии b , значит, $b \perp \pi_1 \Rightarrow b \parallel \pi_2$ и, по теореме о проецировании прямого угла, $M_2R_2 \perp b_2$. Точка $R \in b$. Так как $M_2R_2 \parallel O_x$, MR линия горизонтального уровня проецируется на π_1 в натуральную величину $|M_1R_1|=|MR|$ (рис. 3.19, б).

Перпендикуляр к проецирующей прямой является линией уровня, т.е. частной прямой.

3.4.2. Фронтально-проецирующие прямые

Линия, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций, называется *фронтально-проецирующей*.

Рассмотрим линию $d \perp \pi_2$ на эпиюре и наглядном изображении (рис. 3.20).

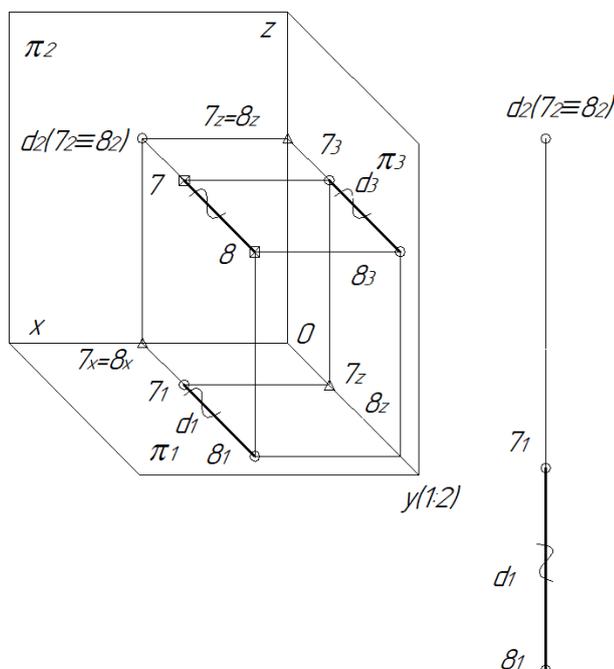


Рис. 3.20

Линия d не только перпендикулярна фронтальной плоскости проекций, но параллельна горизонтальной и профильной плоскостям проекций: $d \parallel \pi_1$ и $d \parallel \pi_3$.

Вырожденная проекция линии d на $\pi_2 - d_2$, а истинная величина на $\pi_1 - d_1$ и на $\pi_3 - d_3$.

Задача 3.7. Постройте недостающую проекцию точки D , принадлежащую линии t , параллельной фронтальной плоскости проекций (рис. 3.21, а).

Решение.

Так как линия e проецируется на π_2 вырождено, значит, e – фронтально-проецирующая прямая. Координаты x и z всех точек на π_2 одинаковы, меняется только y на π_1 . Проведем на π_1 горизонтальную проекцию $t_1 \parallel O_x$ через заданную горизонтальную проекцию точки $D - D_1$, получим горизонтальные проекции точек пересечения $t_1 \cap n_1 = 1_1$; $t_1 \cap e_1 = 2_1$. По линии ортогональной связи найдем фронтальные проекции точек: $1 - 1_2 \in n_2$ и $2 - 2_2 \in e_2$. Соединим фронтальные проекции 1_2 и 2_2 . На продолжении этой проекции в пересечении с линией ортогональной связи, идущей из D_1 , получим фронтальную проекцию точки $D - D_2$ (рис. 3.21, б).

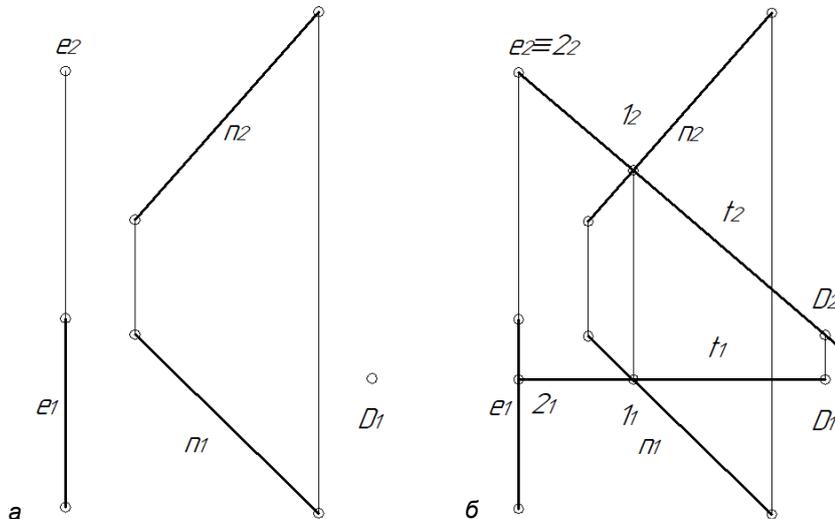


Рис. 3.21

3.4.3. Профильно-проецирующие прямые

Линия, параллельная оси проекций O_x и перпендикулярная профильной плоскости проекций, называется *профильно-проецирующей*.

На рис. 3.22 показано, что линия g не только перпендикулярна π_3 , но и $g \parallel \pi_1$ и $g \parallel \pi_2$. Это значит, что истинная величина отрезка, принадлежащего такой прямой, видна на π_1 и на π_2 , проекция прямого угла также будет проецироваться без искажения на обе плоскости проекций.

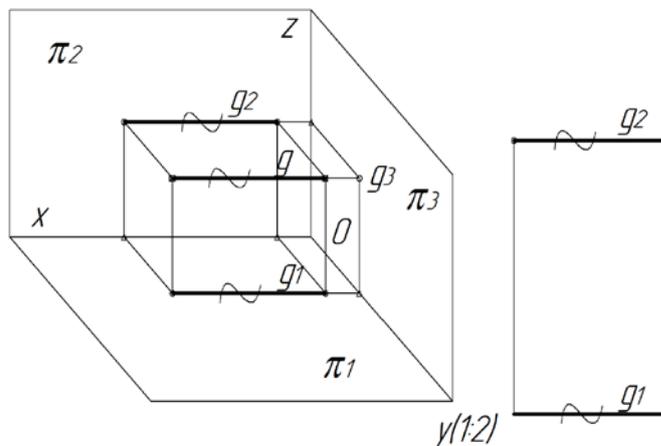


Рис. 3.22

4. ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. Плоскости общего положения

Рассмотрим плоскости общего положения. Определим положение точек и линий в них. Покажем главные линии плоскости: h – горизонталь плоскости; f – фронталь плоскости.

Плоскостью общего положения называют плоскость пространства, не параллельную и не перпендикулярную ни к одной из плоскостей проекций π_1 , π_2 или π_3 .

4.1.1. Способы задания плоскостей общего положения

Рассмотрим различные способы задания плоскости и их отображения на эюре. Три любые точки, не лежащие на одной прямой, образуют плоскость $\alpha(ABC)$ (рис. 4.1, а), две параллельные прямые образуют плоскость $\beta(a||b)$ (рис. 4.1, б).

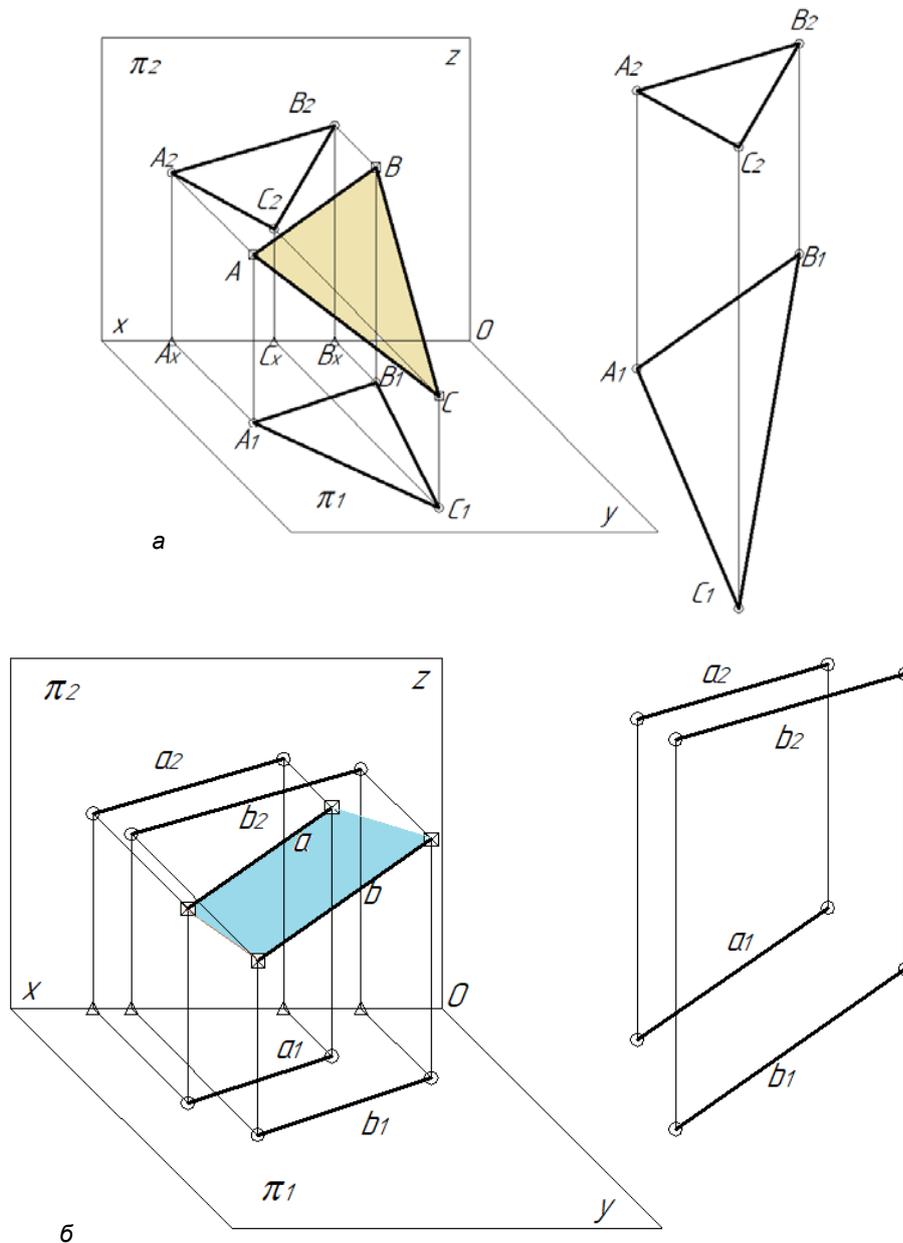


Рис. 4.1

Пусть плоскость γ будет задана точкой P и линией $\gamma_\tau \gamma(P, \gamma_\tau)$ (рис. 4.2,а). Напомним, что линия γ_τ – это результат пересечения γ со второй бессекторной плоскостью тождества τ , т.е. вместо линии γ_τ мы можем записать, что это линия $l \in \tau$. По свойствам любого элемента, принадлежащего τ , у линии l проекции на π_1 и π_2 совпадают. Плоскость δ задана пересекающимися линиями: $\delta(c \cap d = E)$ (рис. 4.2, б).

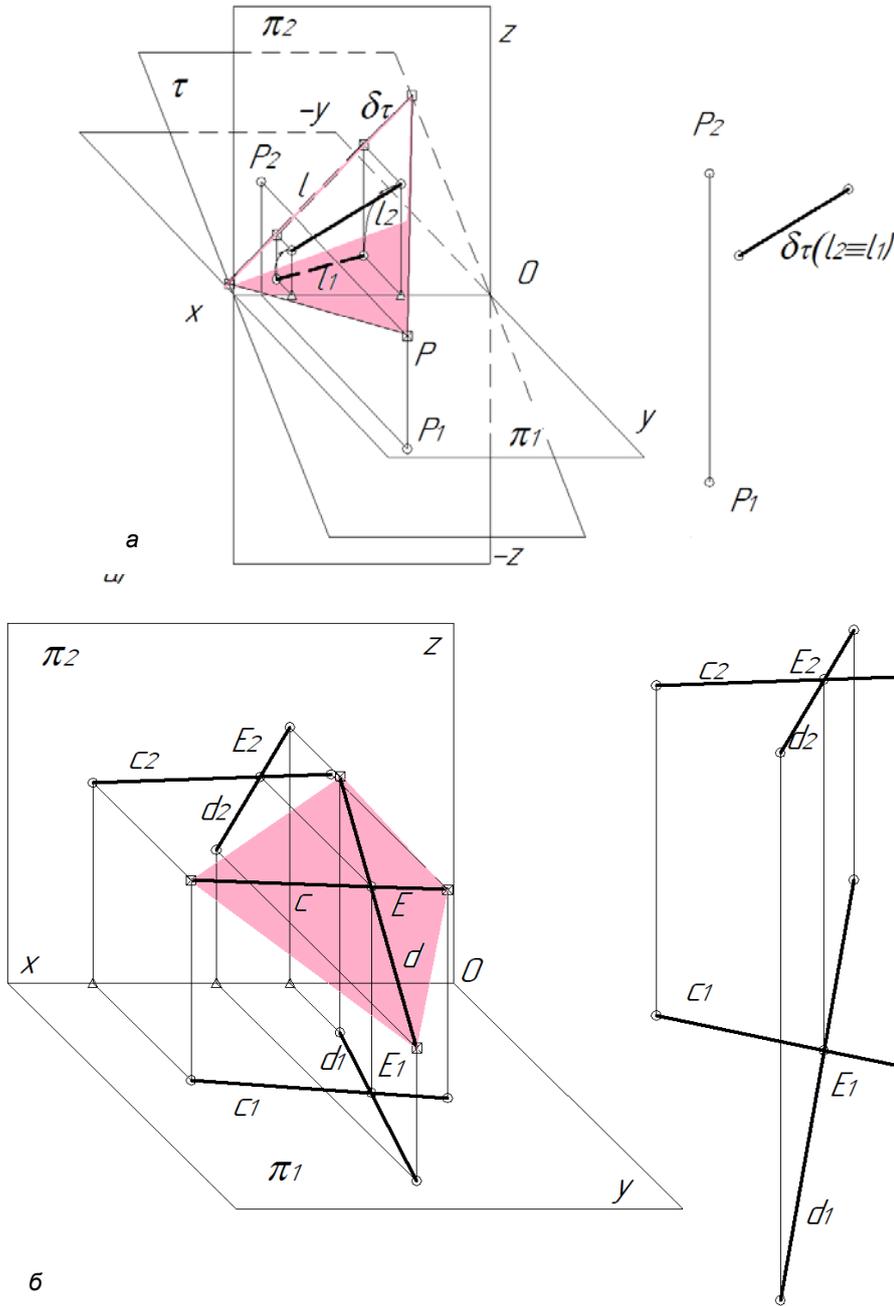


Рис. 4.2

4.1.2. Алгоритм принадлежности точки и линии плоскости

Точка принадлежит плоскости, если принадлежит линии, лежащей в этой плоскости. Линия принадлежит плоскости, если имеет с ней две общие точки или одну общую точку и параллельна другой линии, лежащей в этой плоскости.

На этом алгоритме основано решение множества задач на определение недостающих проекций точек, принадлежащих заданным плоскостям. На рис. 4.3 изображено поэтапное построение нахождения недостающей проекции точки N , принадлежащей плоскости $\alpha(ABC)$ (рис. 4.3, а).

1. Проведем фронтальную проекцию линии $A_1A_21_2$, которой принадлежит проекция точки $N - N_2$ (рис. 4.3, б).

2. По линии ортогональной связи точки 1 найдем ее горизонтальную проекцию 1_1 .

3. Построим горизонтальную проекцию отрезка $A_1A_11_1$ так, чтобы линия ортогональной связи, идущая из N_2 , пересекла ее. Именно здесь находится недостающая горизонтальная проекция точки $N - N_1$ (рис. 4.3, в).

4. Покажем, что положение точки N на горизонтальной проекции не зависит от того, с помощью какого отрезка прямой ее нашли. Для этого проведем произвольный отрезок 2_23_2 на фронтальной проекции, по линиям ортогональной связи найдем его горизонтальную проекцию, убедимся, что N_1 принадлежит 2_13_1 (рис. 4.3, г).

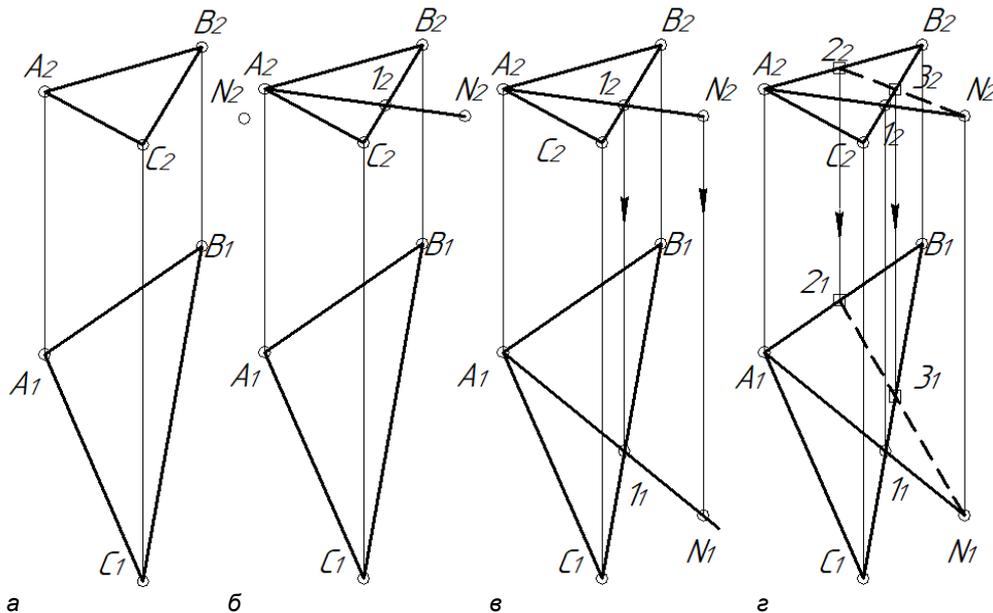


Рис. 4.3

Рассмотрим решение аналогичной задачи.

Задача 4.1. Достройте недостающую проекцию плоской фигуры $ABCDE$ (рис. 4.4).

Решение.

Плоская фигура задана $\triangle ABE$ (рис. 4.4, а). Соединим на фронтальной и горизонтальной плоскостях эту фигуру. Точка C у этого треугольника принадлежит линии A_1 (линия A_1 имеет с $\triangle ABE$ две общие точки). Найдем фронтальную проекцию $A_1 - A_21_2$, фронтальная проекция C_2 принадлежит линии A_21_2 (рис. 4.4, б).

Точку D найдем на линии B_2 на горизонтальной проекции $D_1 \in B_12_1$. Построим фронтальную проекцию B_22_2 по линиям ортогональной связи, $D_2 \in B_22_2$. Очертим плоскую фигуру на фронтальной проекции основной линией (рис. 4.4, в).

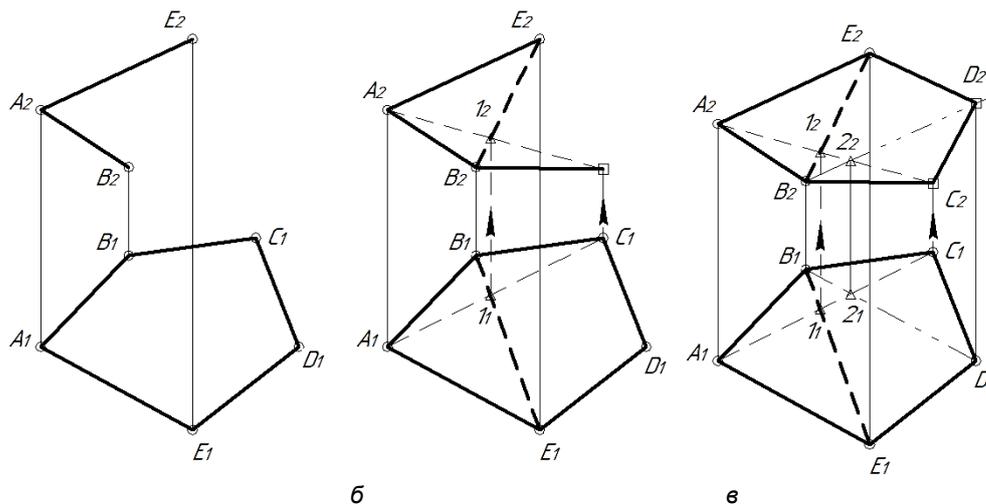


Рис. 4.4

Для удобства вспомогательные линии вычертили различными типами (штриховой основной, штриховой и штриховой с двумя точками).

Задача 4.2. Достройте недостающие проекции точек $ABCD$, принадлежащих заданной плоскости $\omega(P, \omega_\tau)$ (рис. 4.5, а).

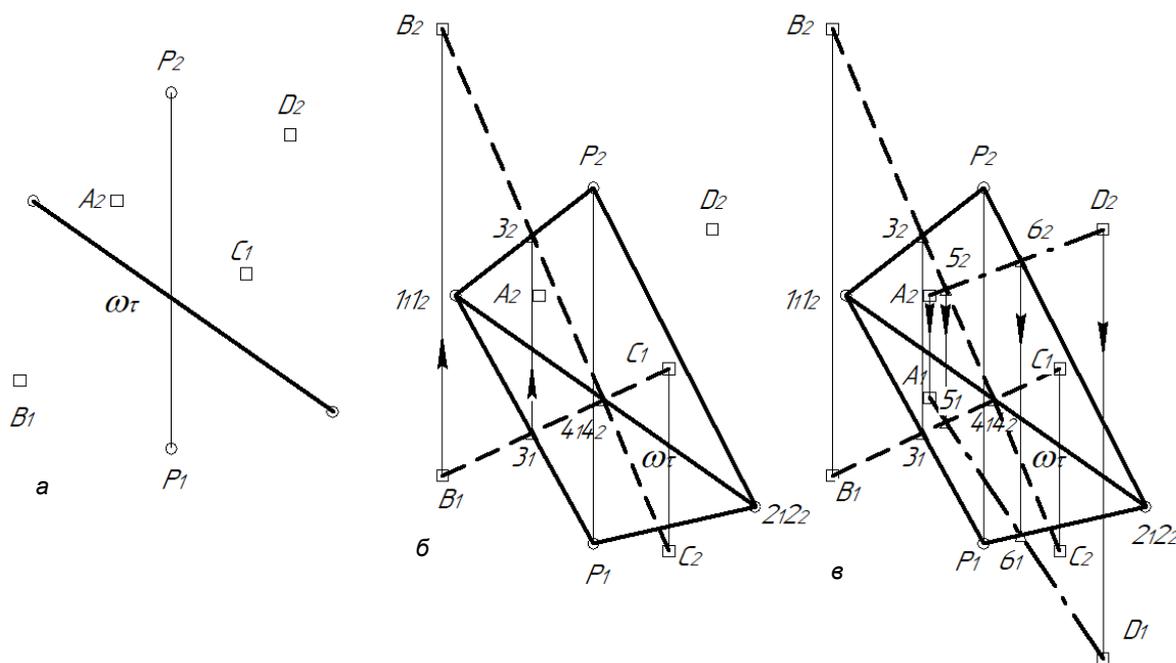


Рис. 4.5

Решение.

Напомним, что линия пересечения $\omega_\tau = \omega \cap \tau$ обладает свойством совпадения фронтальной и горизонтальной проекций на эпюре. Перейдем от способа задания плоскости точкой и линией к способу задания той же плоскости тремя точками $\omega(12P)$, где точки 1 и 2 взяты на линии ω_τ . На эпюре знак тождества \equiv горизонтальных и фронтальных проекций точек можно пропустить.

При решении следует заключить горизонтальные проекции точек $BC - B_1C_1$ в линию 3_1A_1 , найти фронтальную проекцию $3_4 - 3_2A_2$, построить линии ортогональной связи, идущие из горизонтальных проекций B_1C_1 до пересечения с 3_2A_2 (рис. 4.5, б). На рис. 4.5, в определены недостающие горизонтальные проекции $AD - A_1D_1$.

4.1.3. Главные линии плоскости: горизонталь h и фронталь f

Главными линиями у плоскости называют линии, принадлежащие ей и параллельные горизонтальной π_1 или фронтальной π_2 плоскостям проекций.

Горизонталью называют любую линию плоскости общего (частного) положения, параллельную горизонтальной плоскости проекций π_1 . Будем обозначать эту линию h .

Так как $h \parallel \pi_1$, то высота всех ее точек на фронтальной проекции π_2 одинакова, т.е. $h_2 \parallel O_x$ (фронтальная проекция горизонтали параллельна воображаемой оси x). Как пройдет эта линия на π_1 , неизвестно, нужно построить горизонтальную проекцию горизонтали h_1 через те точки, через которые она прошла на π_2 . На горизонтальной проекции отрезок, через который проходит горизонталь, проецируется без искажения.

Наглядные изображения и эпюр плоскостей общего положения с принадлежащими им горизонталями показаны на рис. 4.6.

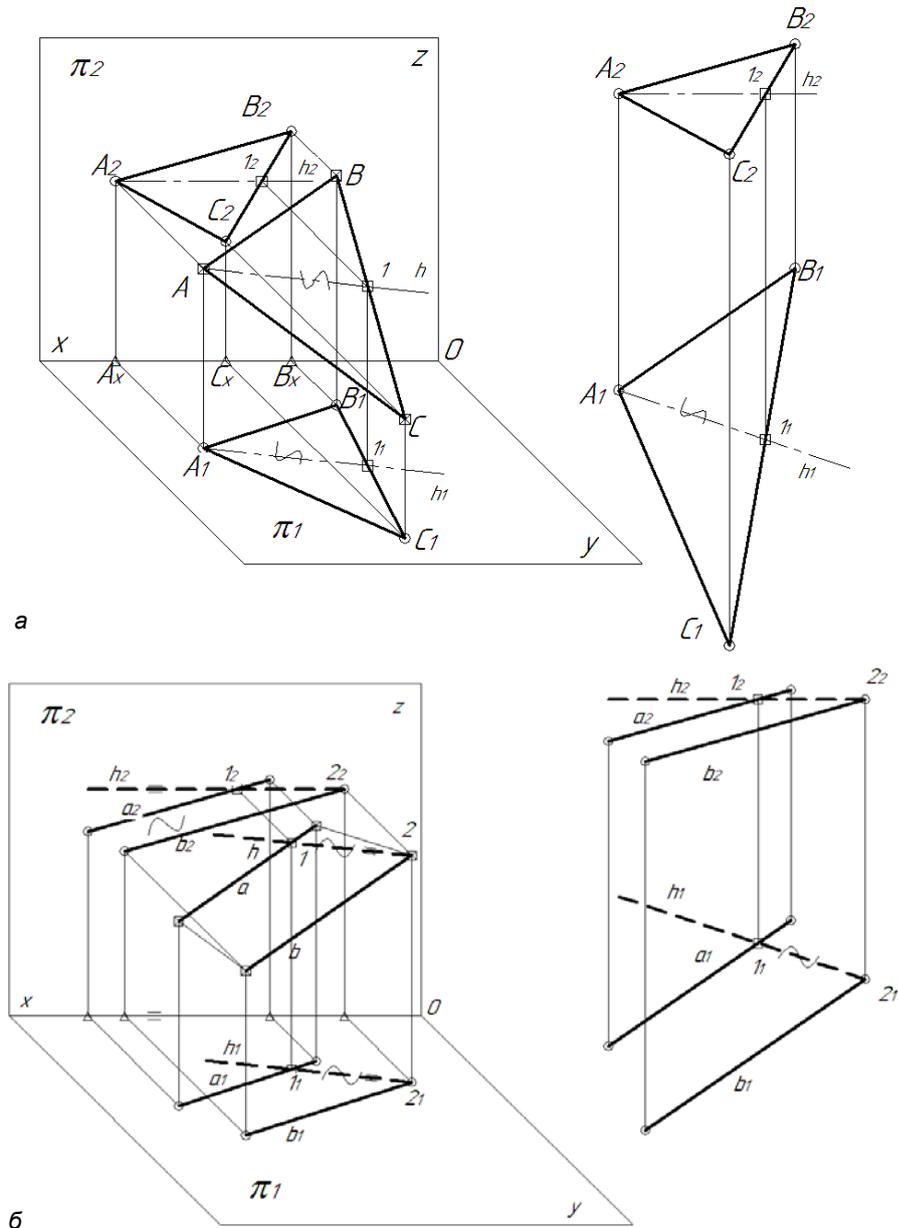


Рис. 4.6

Имея эпюр плоскости $\alpha(ABC)$ на рис. 4.6, а, для построения ее горизонтали на фронтальной проекции выбираем две любые проекции с одинаковой координатой z . Удобно воспользоваться фронтальной проекцией точки $A - A_2$. Проводим фронтальную проекцию горизонтали плоскости h_2 через A_2 , параллельно воображаемой оси x , h_2 прошла через вторую фронтальную проекцию точки, принадлежащей $\alpha(ABC)$ 1_2 . По линиям ортогональной связи на π_1 находим горизонтальную проекцию 1_1 . Соединив горизонтальные проекции A_1 и 1_1 , получим горизонтальную проекцию горизонтали h_1 .

У плоскости $\beta(allb)$ (рис. 4.6, б) для построения горизонтали h использовали точки с одинаковой высотой 1_2 . Построения проведены аналогично рис. 4.6.

Построение горизонталей у плоскостей $\gamma(P, \gamma_\tau)$ и $\delta(c \cap d = E)$ показано на рис. 4.7.

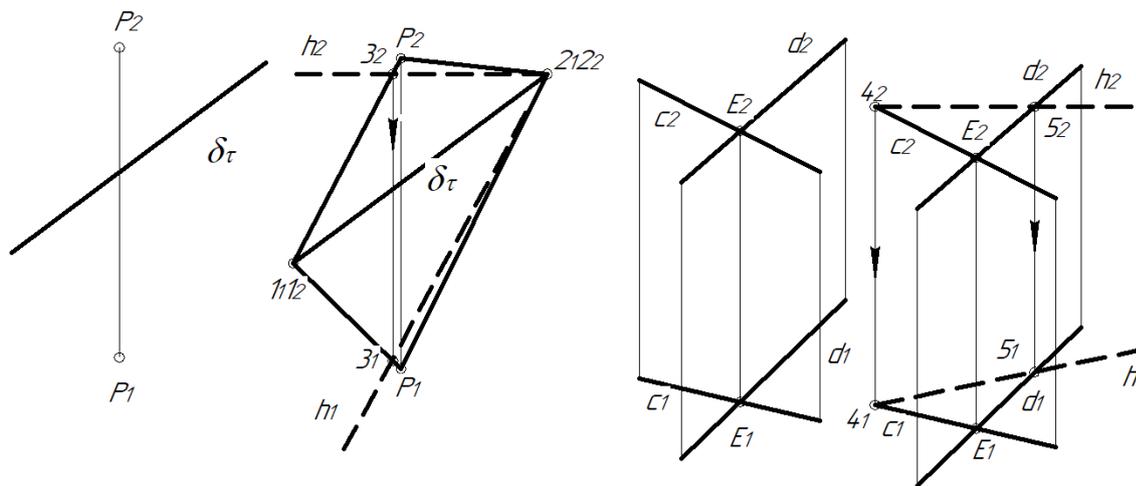


Рис. 4.7

Фронталью называют любую линию плоскости общего (частного) положения, параллельную фронтальной плоскости проекций π_2 . Будем обозначать эту линию на эпюре f .

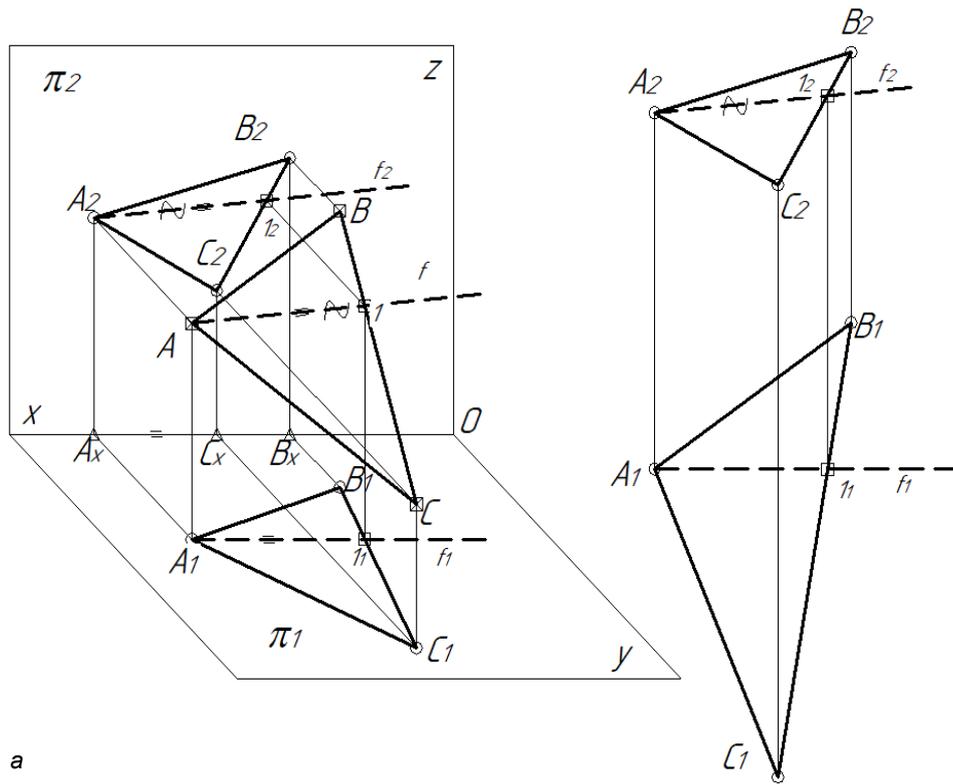
Так как $f \parallel \pi_2$, то приближение всех ее точек на горизонтальной проекции π_1 одинаково, т.е. $f_1 \parallel O_x$ (*горизонтальная проекция фронтали параллельна воображаемой оси x*). Как пройдет эта линия на π_2 неизвестно, нужно построить фронтальную проекцию фронтали f_2 через те точки, через которые она прошла на π_1 . На фронтальной проекции отрезок, через который проходит фронталь, проецируется без искажения.

Главная линия на наглядном изображении и эпюре у плоскости $\alpha(ABC)$ показана на рис. 4.8, а и плоскости $\beta(allb)$ на рис. 4.8, б.

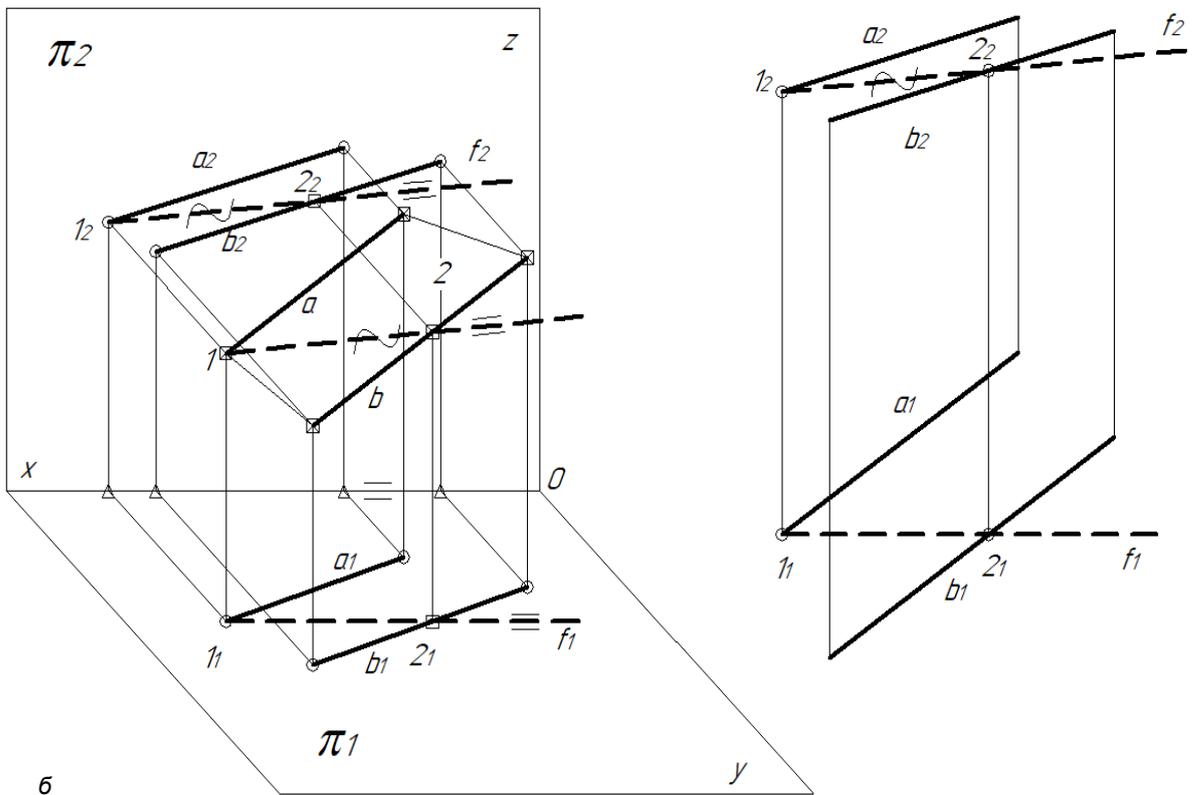
При построении фронтали у плоскости $\alpha(ABC)$ (рис. 4.8, а) на горизонтальной проекции через проекцию A_1 и 1_1 провели линию с одинаковым удалением по оси y : $f_1 \parallel O_x$. По линиям ортогональной связи нашли фронтальную проекцию точки $1 - 1_2$. Соединили A_2 и 1_2 , получили фронтальную проекцию фронтали f_2 . Проекция отрезка $A1$ на π_2 проецируется в истинную величину: $|A_2 1_2| = |A1|$.

Для построения фронтали у $\beta(allb)$ (рис. 4.8, б) воспользовались произвольным отрезком 12 с одинаковым удалением на горизонтальной плоскости проекций $f_1(1_1 2_1) \parallel O_x$. Построили фронтальные проекции точек 12 по линиям ортогональной связи из условия принадлежности точек плоскости, получили фронтальную проекцию фронтали $f_2(1_2 2_2)$. Отрезок 12 на фронтальной плоскости отобразился в истинную величину: $|1_2 2_2| = |12|$.

На рис. 4.9 показано построение главной линии плоскости фронтали у плоскостей $\gamma(P, \gamma_\tau)$ и $\delta(c \cap d = E)$.



a



b

Рис. 4.8

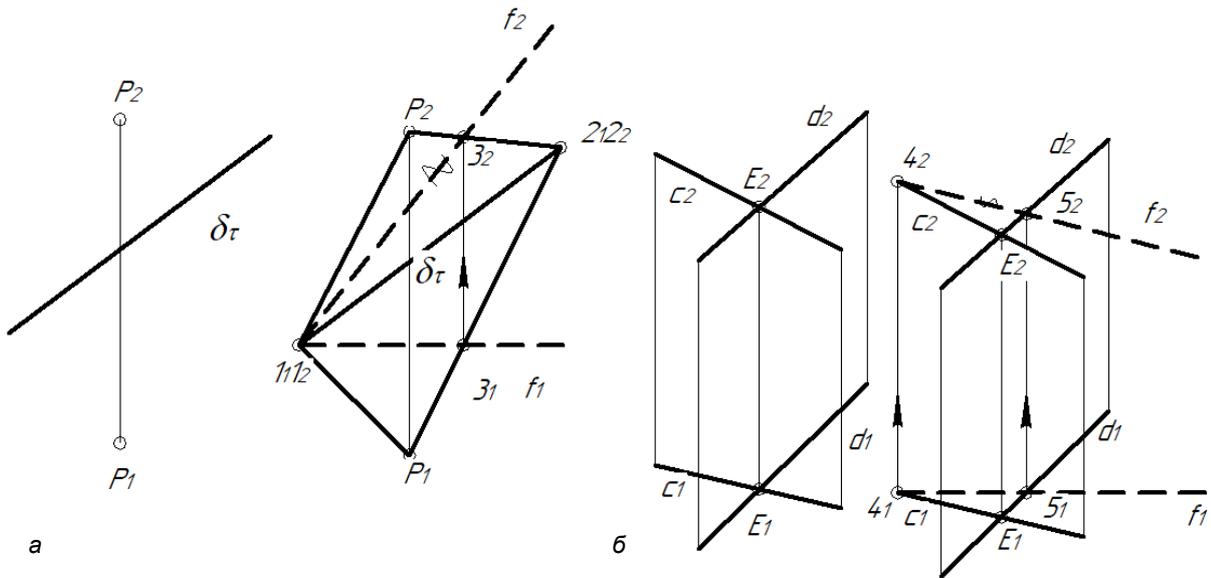


Рис. 4.9

4.2. Проецирующие плоскости

Проецирующими называют плоскости, перпендикулярные к какой-либо плоскости проекций: π_1 , π_2 или π_3 .

4.2.1. Горизонтально-проецирующие плоскости

Плоскости, перпендикулярные горизонтальной плоскости проекций π_1 , называют *горизонтально-проецирующими*.

Рассмотрим наглядное изображение горизонтально-проецирующей плоскости α (рис. 4.10, а) и ее эюр (рис. 4.10, б).

На наглядном изображении видно, что плоскость α пересекается с π_1 по линии α_1 , а π_2 по линии α_2 – это следы плоскости: α_1 – горизонтальный след, α_2 – фронтальный след. Горизонтальный след плоскости α обладает собирательной способностью: все элементы, принадлежащие α проецируются на горизонтальную плоскость проекций именно на эту линию пересечения α_1 . На продолжении α_1 , отступив 1–2 мм, утолщенной линией (длиной 8–12 мм) нарисован знак собирательности следа.

Угол между горизонтальным следом и осью x – это угол наклона плоскости α ко фронтальной плоскости проекций π_2 – ψ° .

Фронтальный след плоскости α перпендикулярен оси x . Его изображением на эюре можно пренебречь, так как элемент принадлежит горизонтально-проецирующей плоскости, то положение его на π_2 нам безразлично, главное, чтобы проекция на π_1 принадлежала собирательному следу α_1 . Следовательно, проецирующая плоскость на эюре может быть задана одним собирательным следом $\alpha(\alpha_1)$ (рис. 4.10, б).

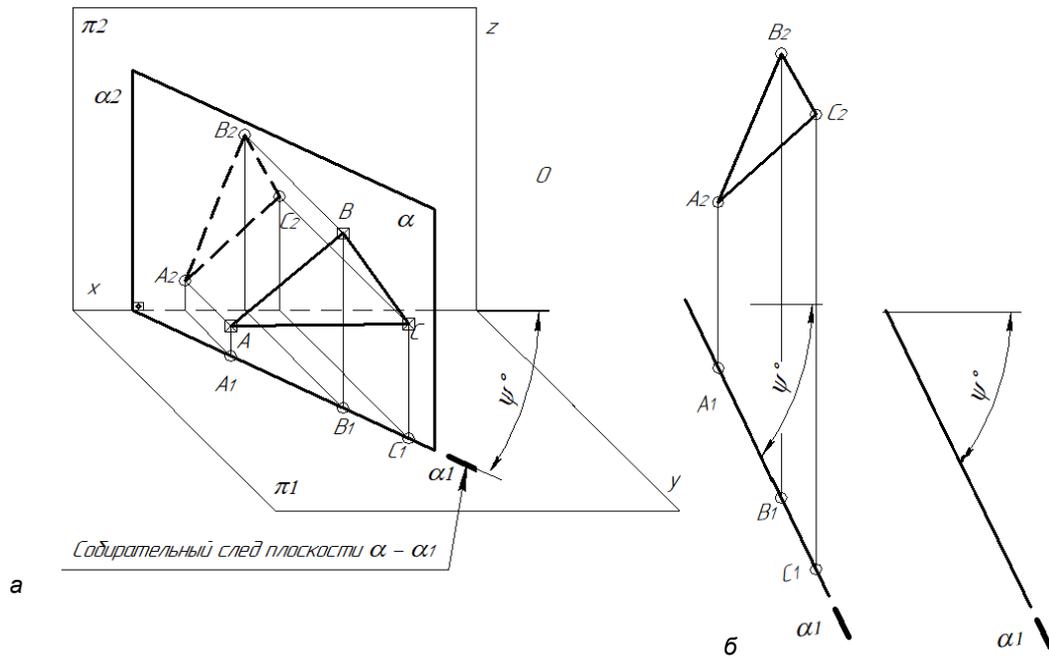


Рис. 4.10

На эюре (рис. 4.11) показаны различные горизонтально-проецирующие плоскости: $\beta(a||b)$, $\gamma(c \cap d)$, $\delta(P; k)$.

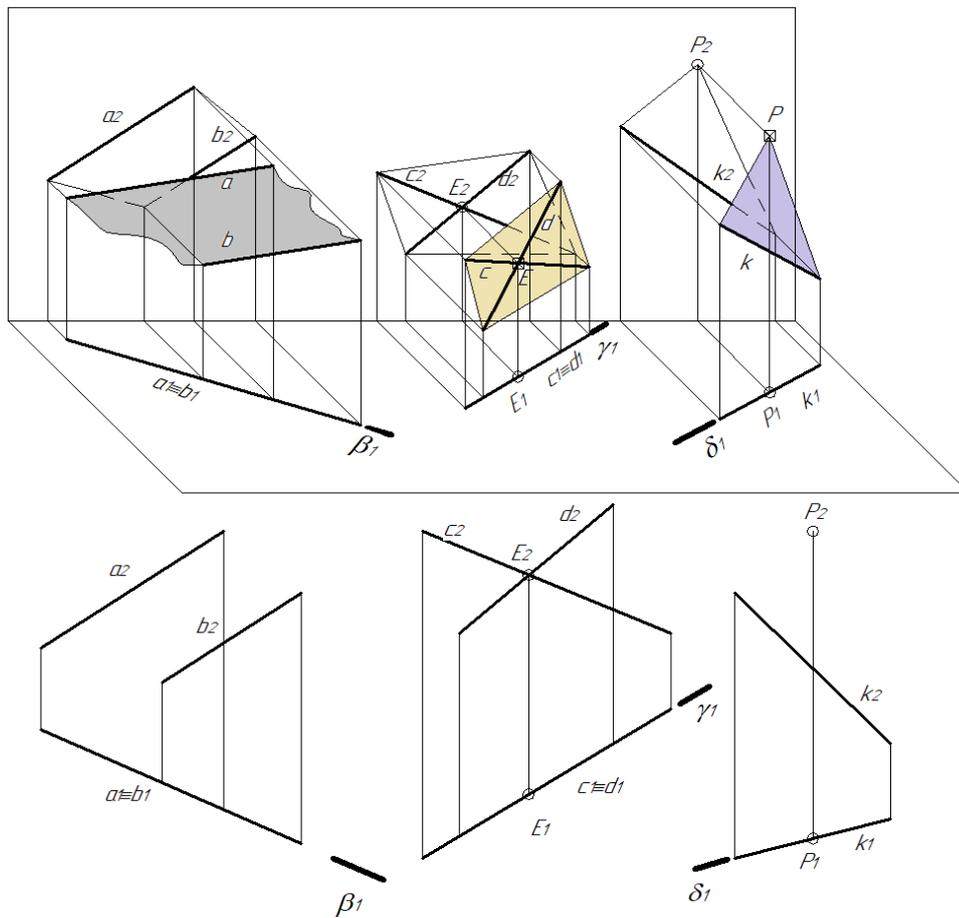


Рис. 4.11

Построим главные линии у этих плоскостей: горизонталь h и фронталь f (рис. 4.12).

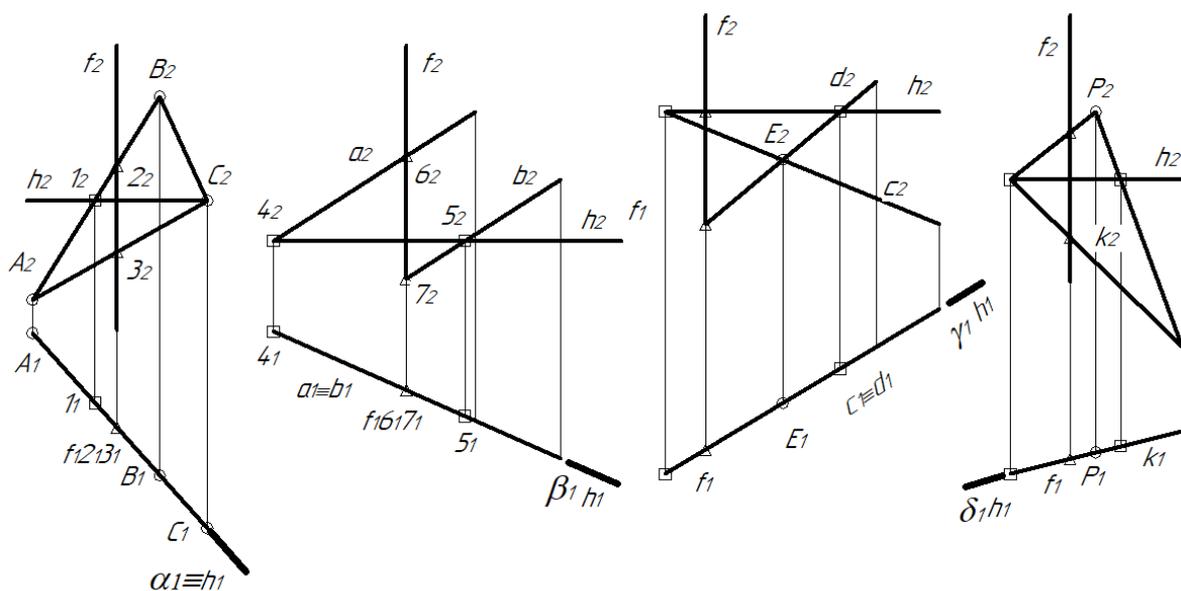


Рис. 4.12

Горизонталь на фронтальной проекции π_2 параллельна воображаемой оси x : $h_2 \parallel O_x$ у всех плоскостей, а на горизонтальной проекции π_1 совпадает со своим собирательным следом, например, $h_1 \equiv \alpha_1$. Фронталь у горизонтально-проецирующих плоскостей на горизонтальной проекции π_1 получается вырожденной на собирательном следе своей плоскости, так как должна иметь одинаковую координату y для своих всех точек. На фронтальной проекции π_2 $f_2 \perp O_x$.

Рассмотрим некоторые задачи.

Задача 4.3. Постройте ромб $ADCD$, принадлежащий заданной плоскости $\alpha(\alpha_1)$, с диагоналями $|AC|=30$ мм, $|BD|=40$ мм (рис. 4.13, а).

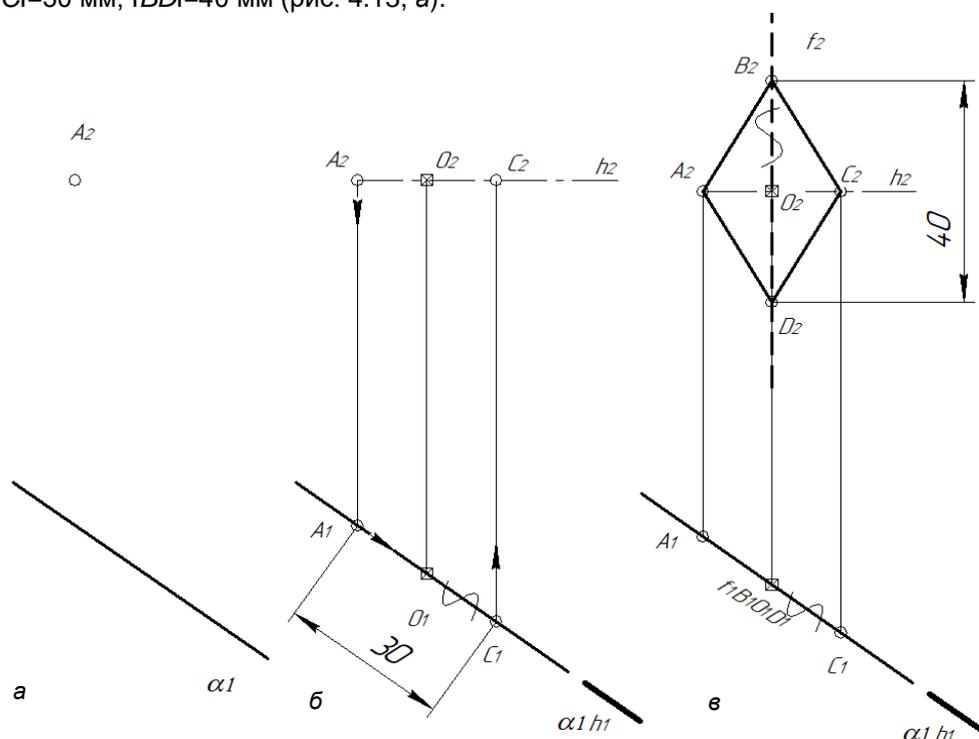


Рис. 4.13

Решение.

Так как плоскость $\alpha(\alpha_1)$ – горизонтально-проецирующая (задана своим собирательным следом), покажем знак собирательности горизонтального следа. Расположим диагонали ромба на главных линиях плоскости горизонтали $AC \in h$ и фронтали $BD \in f$. Значит, $|A_1C_1|=30$ мм, а $|B_2D_2|=40$ мм. Точка пересечения диагоналей ромба O делит диагонали пополам, т.е. $|A_1O_1|=|O_1C_1|$, $|A_2O_2|=|O_2C_2|$, а $|B_1O_1|=|O_1D_1|$ и $|B_2O_2|=|O_2D_2|$.

1. Через заданную фронтальную проекцию точки $A-A_2$ проведем линию ортогональной связи, найдем горизонтальную проекцию A_1 , принадлежащую собирательному следу плоскости. Отложим горизонтальную проекцию $|A_1C_1|=30$ мм на собирательном следе. Покажем проекцию точки O – середину диагонали AC на π_1-O_1 . Через A_2 проведем фронтальную проекцию горизонтали $h_2 \parallel O_x$. По линиям связи покажем на ней фронтальные проекции точек A_2 и O_2 (рис. 4.13, б).

2. Строим фронталь $f \in \alpha$. На горизонтальной проекции она вырождена, совпадая с O_1 , а на фронтальной проходит через фронтальную проекцию O_2 перпендикулярно воображаемой оси x . Отложим от O_2 $|B_2O_2|=|O_2D_2|=20$ мм. Соединим проекции ромба (рис. 4.13, в).

Задача 4.4. Определите точку пересечения плоскости $\beta(\beta_1)$ и линии m (рис. 4.14), определите видимость прямой.

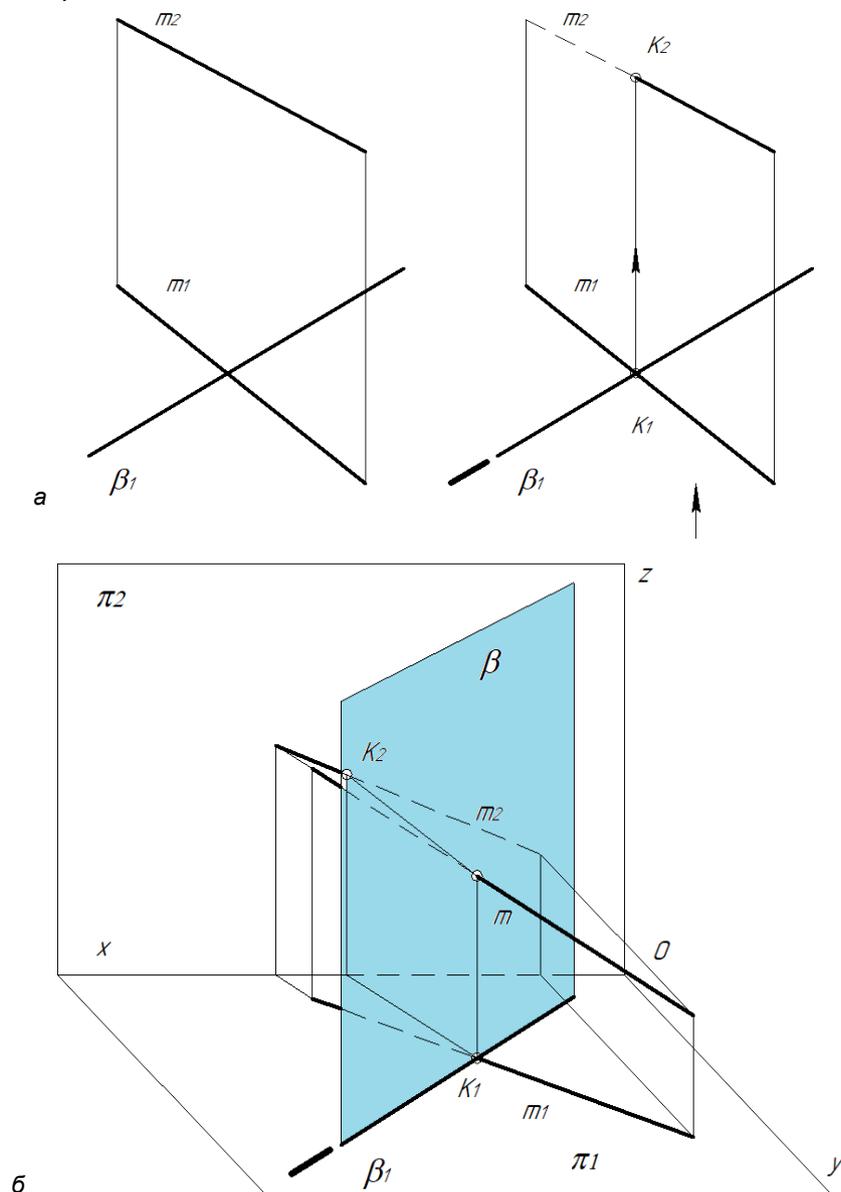


Рис. 4.14

Решение.

Так как плоскость $\beta(\beta_1)$ проецирующая, пометим ее горизонтальный след знаком собирательности. Точка пересечения $\beta(\beta_1) \cap m$ должна лежать на собирательном следе и принадлежать проекции m_1 : $\beta_1 \cap m_1 = K_1$. Так как точка K принадлежит линии m , следовательно, ее положение на фронтальной проекции найдем по линии ортогональной связи (рис. 4.14, а).

Для определения видимости прямой воспользуемся следующим моментом: на проекции, где присутствует собирательный след, обе части прямой видимы. На вторую проекцию посмотрим со стороны собирательного следа. Часть прямой, расположенная до следа, видна на второй проекции, расположенная за следом, невидима на второй проекции (рис. 4.14, а).

На рис. 4.14, б представлено наглядное изображение этой задачи.

4.2.2. Фронтально-проецирующие плоскости

Плоскости, перпендикулярные фронтальной плоскости проекций π_2 , называют фронтально-проецирующими.

Рассмотрим на наглядном изображении положение таких плоскостей и их эюры (рис. 4.15).

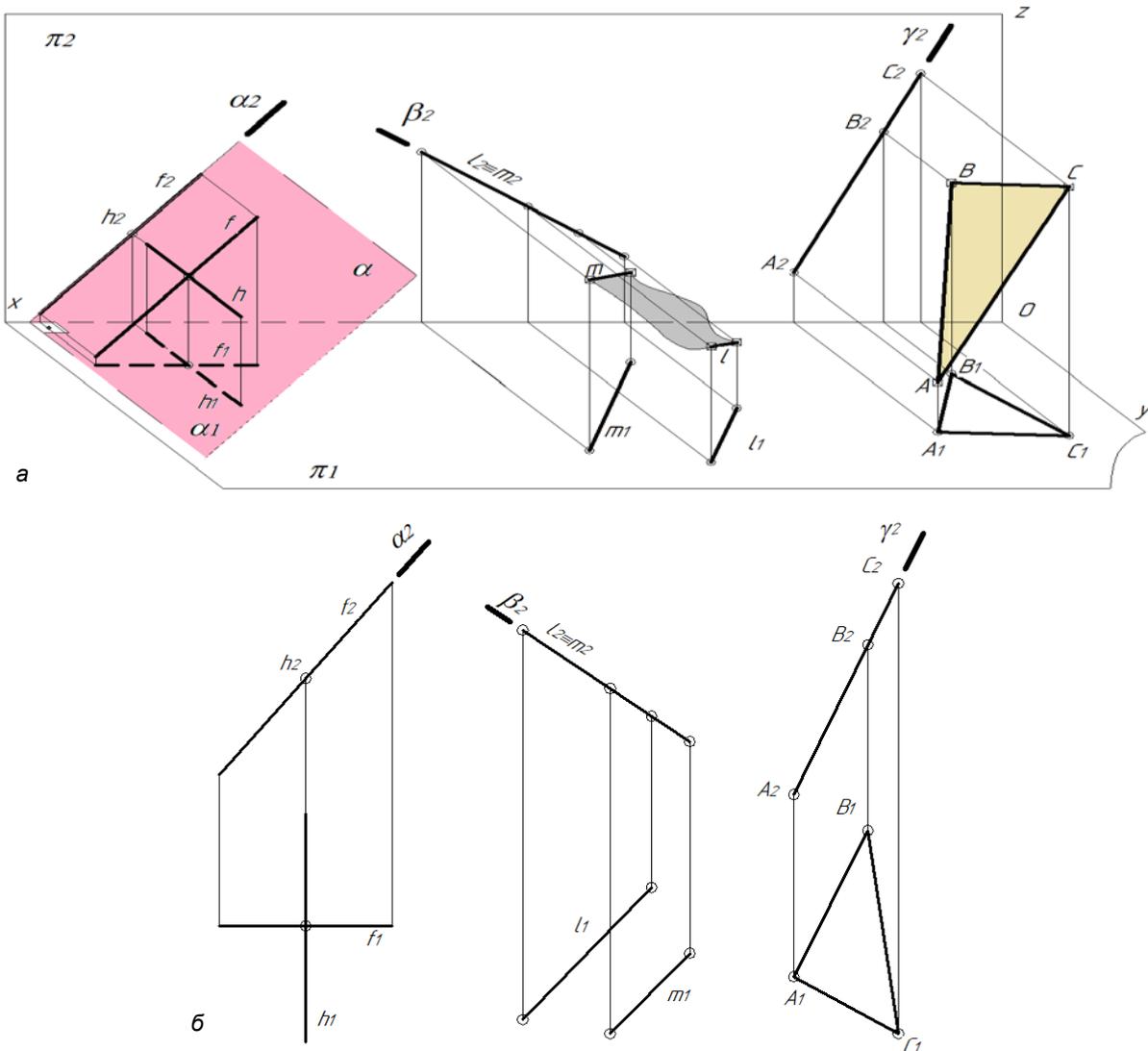


Рис. 4.15

Плоскость α задана своими следами: α_1 – горизонтальный след плоскости перпендикулярен оси Ox ; α_2 – фронтальный след плоскости в данном случае обладает собирательной способностью (проставлен знак собирательной способности на π_2). Угол между собирательным следом и осью x – угол наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций φ° . На плоскости α показаны главные линии: горизонталь h и фронталь f . Видно, что горизонталь h на π_2 проецируется вырождено $h_2 \in \alpha_2$, а на горизонтальной плоскости проекций π_1 h_1 перпендикулярна оси x . Фронталь f на фронтальной проекции π_2 совпадает с собирательным следом $f_2 \equiv \alpha_2$, а на горизонтальной проекции π_1 $f_1 \parallel Ox$.

Плоскость β задана параллельными линиями $\beta(II m)$, плоскость γ задана тремя точками $\gamma(ABC)$. Построение главных линий в них аналогично плоскости α . Любые элементы, принадлежащие этим плоскостям на фронтальных проекциях, принадлежат их собирательным следам.

Рассмотрим задачу на пересечение двух плоскостей, одна из которых проецирующая.

Задача 4.5. Постройте линию пересечения заданных плоскостей: $\delta(\delta_2)$ и $\omega(k \cap n = E)$ (рис. 4.16, а).

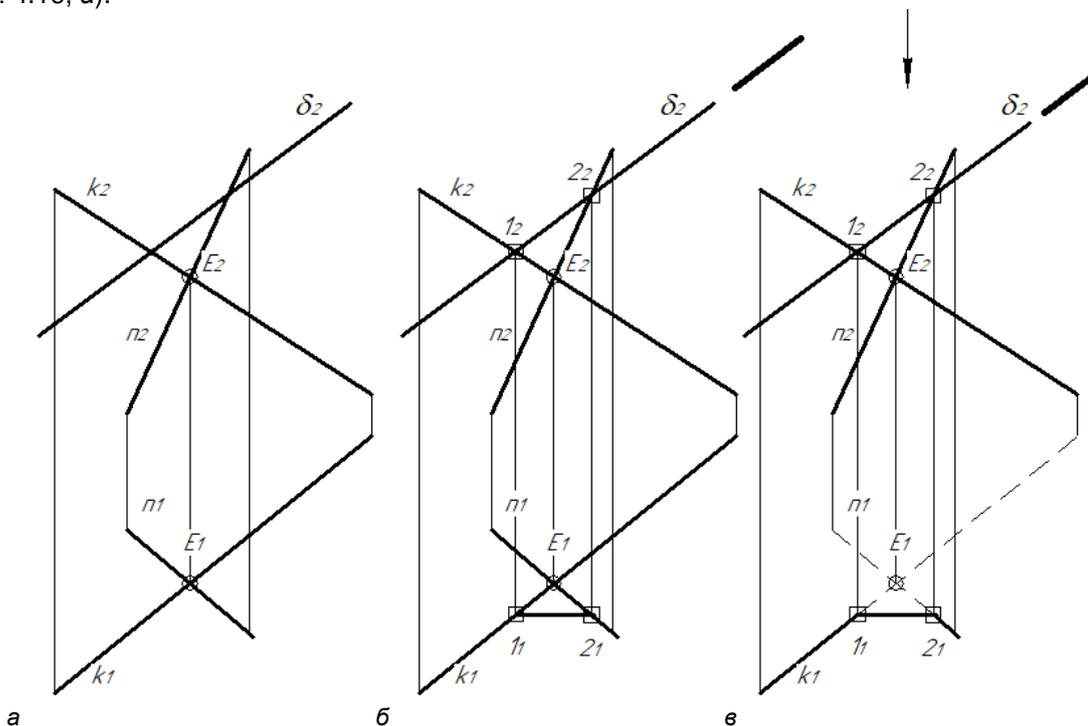


Рис. 4.16

Решение.

Если плоскость δ задана одним следом, значит, она проецирующая $\delta(\delta_2) \perp \pi_2$, ее фронтальный след обладает собирательной способностью, поставим его знак (рис. 4.16, б). Следовательно, линия пересечения этих плоскостей должна на π_2 принадлежать и собирательному следу δ_2 и фронтальной проекции второй плоскости ω . Фронтальные проекции точек $1_2 \in k_2$ и $2_2 \in n_2$ удовлетворяют этому условию. Горизонтальные проекции точек 1 и 2 найдем из условия принадлежности линиям k и n . Соединим горизонтальную проекцию линии пересечения 1_1 и 2_1 основной линией.

Последним этапом определим видимость элементов (рис. 4.16, в). На фронтальной проекции π_2 плоскость δ проецируется линией (вырожденная проекция) и обе части ω нам видимы. На горизонтальной проекции π_1 видимость определим, глядя со стороны координаты y . Взгляд наблюдателя показан стрелкой. Часть плоскости $\omega(k \cap n = E)$, расположенная выше линии пересечения $1_2 2_2$, видна нам на горизонтальной проекции.

Надо отметить, что любые две разноименно проецирующие плоскости пересекаются по линии общего положения рис. 4.17.

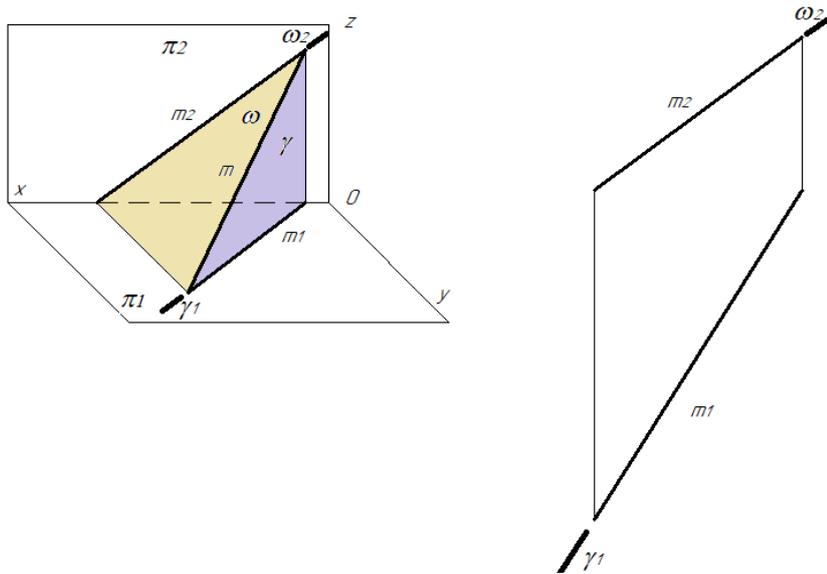


Рис. 4.17

Прямая $m \in \gamma$, так как $m_1 \equiv \gamma_1$: горизонтальная проекция линии m совпала с собирательным следом плоскости γ . Также прямая $m \in \omega$, так как $m_2 \equiv \omega_2$: фронтальная проекция линии m совпала с собирательным следом плоскости ω .

4.2.3. Профильно-проецирующие плоскости

Плоскости, перпендикулярные профильной плоскости проекций π_3 , называют *профильно-проецирующими*.

В системе плоскостей проекций π_2/π_1 – это плоскости, занимающие общее положение. На эюре такие плоскости не имеют никаких преимуществ, так как их собирательный след расположен на π_3 , а мы работаем на π_2 и π_1 . Их отличительной особенностью является положение главных линий горизонтали и фронтали. У профильно-проецирующих плоскостей они совпадают: $h \equiv f$ (рис. 4.18).

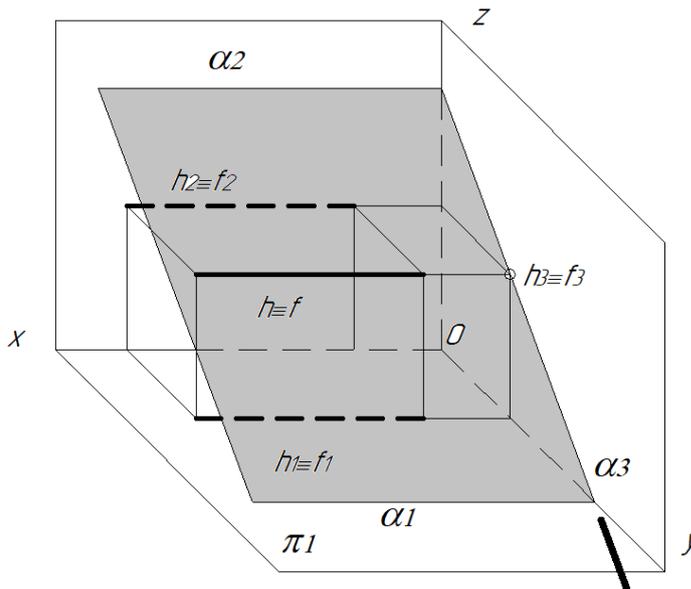


Рис. 4.18

У профильно-проецирующих плоскостей до построения главных линий плоскости можно говорить только о том, что это плоскости общего положения. После построения любой главной линии плоскости горизонтали или фронтали становится ясно, что их разноименные проекции параллельны. Делаем вывод о перпендикулярности плоскости профильной плоскости проекций π_3 . Пусть задана плоскость $\beta(ABC)$ (рис. 4.19, а). Построим горизонталь этой плоскости h . Проведем фронтальную проекцию горизонтали через фронтальную проекцию точки A $h_2 \parallel O_x$, по точкам A и 1 найдем горизонтальную проекцию горизонтали h_1 . На рисунке видно, что $h_2 \parallel h_1$, значит, наша плоскость $\beta(ABC) \perp \pi_3$, т.е. $\beta(ABC)$ – профильно-проецирующая (рис. 4.19, б).

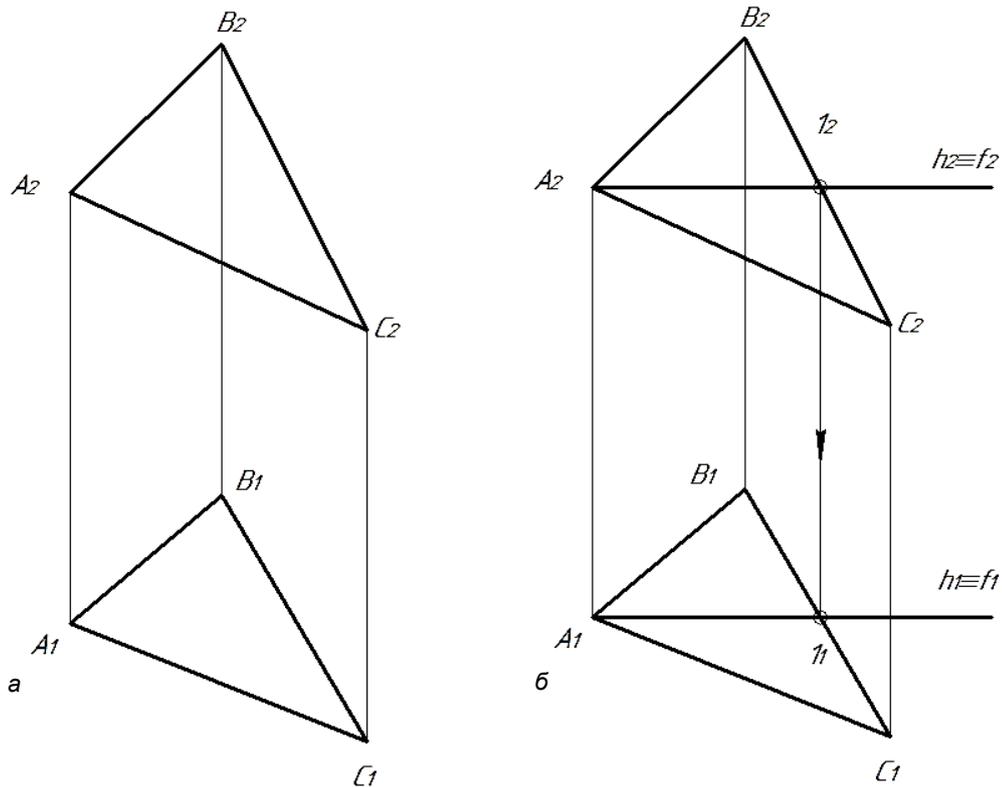


Рис. 4.19

4.3. Плоскости уровня

Плоскости, параллельные какой-либо плоскости проекций, называют *плоскостями уровня*.

4.3.1. Плоскости горизонтального уровня

Плоскости, параллельные горизонтальной плоскости проекций π_1 , называют *плоскостями горизонтального уровня*.

На эюре могут быть заданы плоскости только своими собирательными следами или вместе с элементами, им принадлежащими.

Такие плоскости проецируются на горизонтальную плоскость проекций без искажения (в истинную величину) и они же являются перпендикулярными по отношению к двум другим плоскостям проекций π_2 и π_3 . Наглядные изображения и эюры таких плоскостей показаны на рис. 4.20.

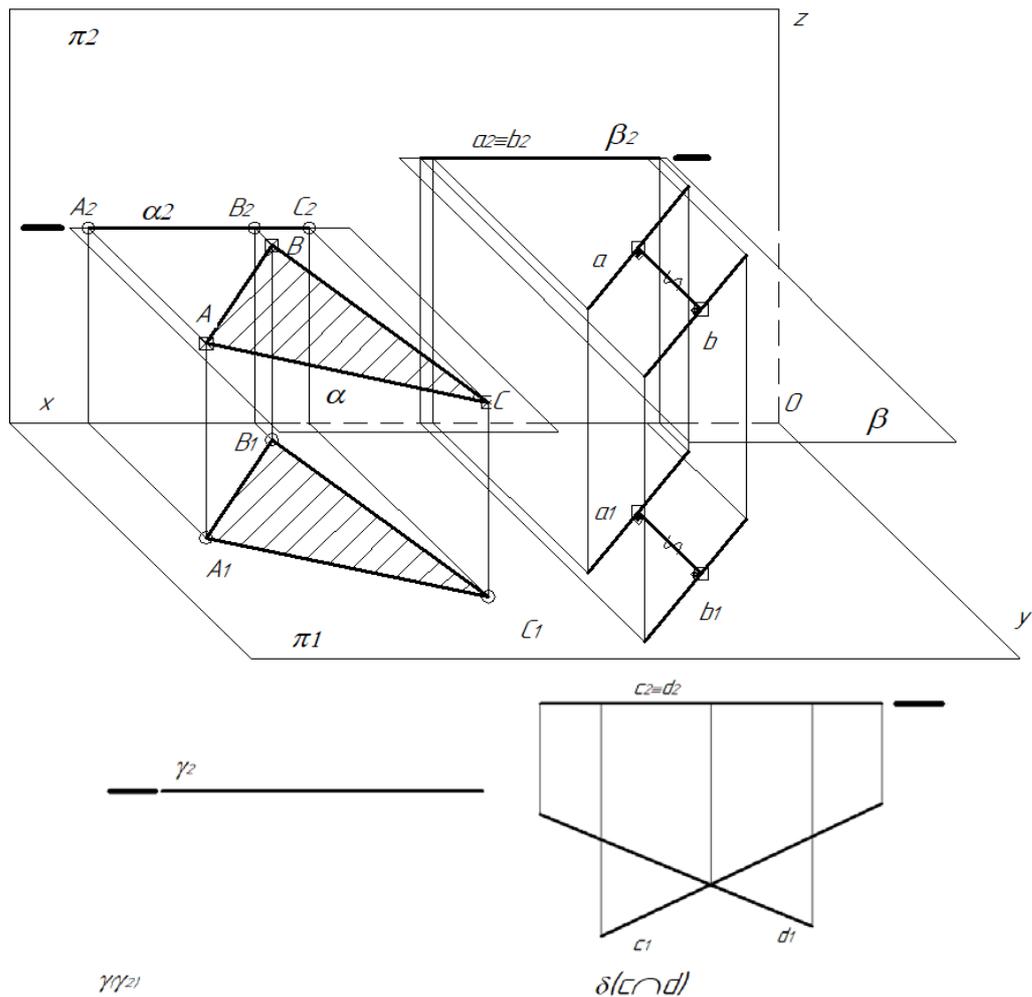


Рис. 4.20

Из представленного видно, что собирательные следы этих плоскостей параллельны оси x . При решении подобных задач следует использовать такие плоскости, добавляя их по своему усмотрению.

4.3.2. Плоскости фронтального уровня

Плоскости, параллельные фронтальной плоскости проекций π_2 , называют плоскостями фронтального уровня.

Такие плоскости проецируются без искажения на фронтальную плоскость проекций π_2 , они же перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций π_1 и профильной плоскости проекций π_3 . Наглядное изображение и эпюры различных плоскостей фронтального уровня показаны на рис. 4.21.

Плоскость ω задана принадлежащим ей $\Delta(KLM)$, плоскость μ задана своим собирательным следом $\mu(\mu_1)$. Собирательные следы на π_1 параллельны воображаемой оси x .

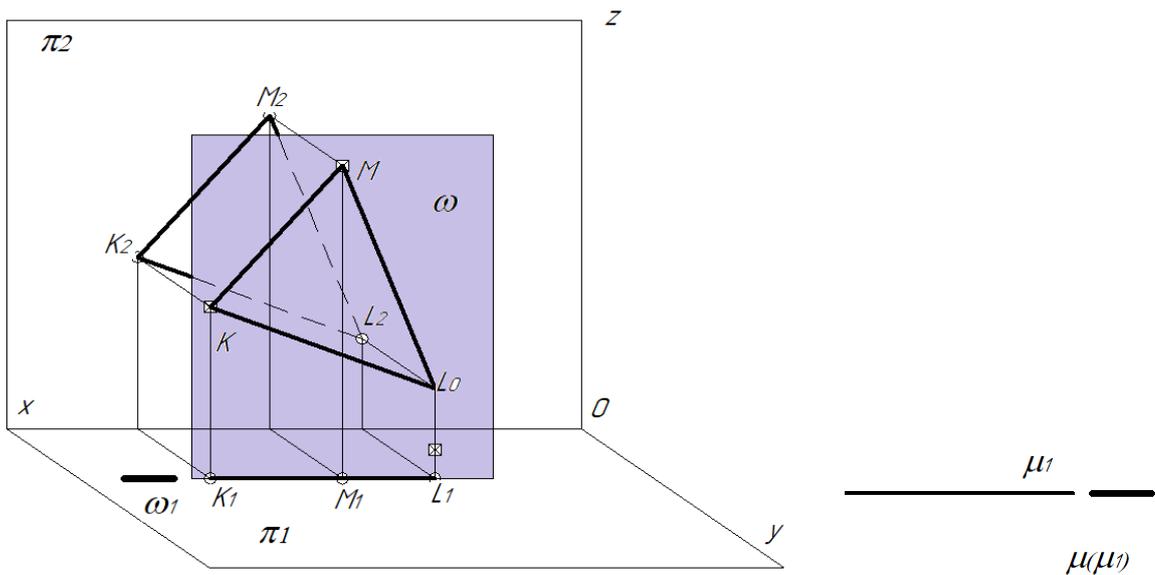


Рис. 4.21

4.4. Взаимное положение плоскостей

Любые плоскости в пространстве могут быть: параллельными, перпендикулярными или пересекающимися.

Теорема о *параллельности* двух плоскостей: две плоскости взаимно параллельны, если две пересекающиеся линии взаимно параллельны двум пересекающимся линиям второй плоскости.

Такие плоскости показаны на рис. 4.22, а.

Теорема о *перпендикулярности* двух плоскостей: две плоскости перпендикулярны, если одна из них содержит прямую перпендикулярную второй плоскости. Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

Такие плоскости показаны на рис. 4.22, б.

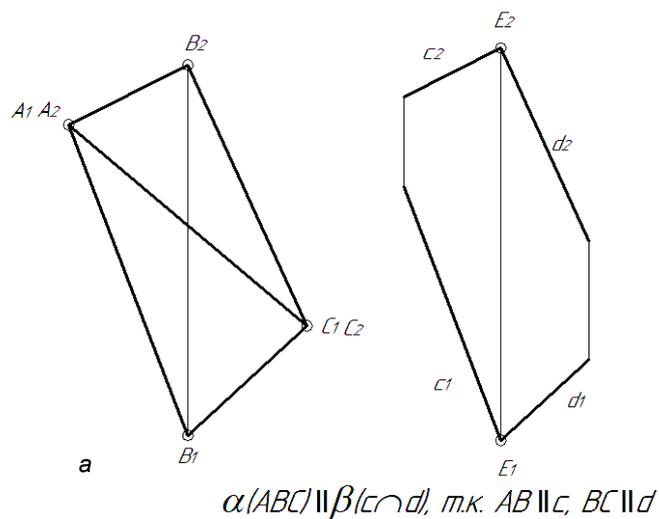


Рис. 4.22 (начало)

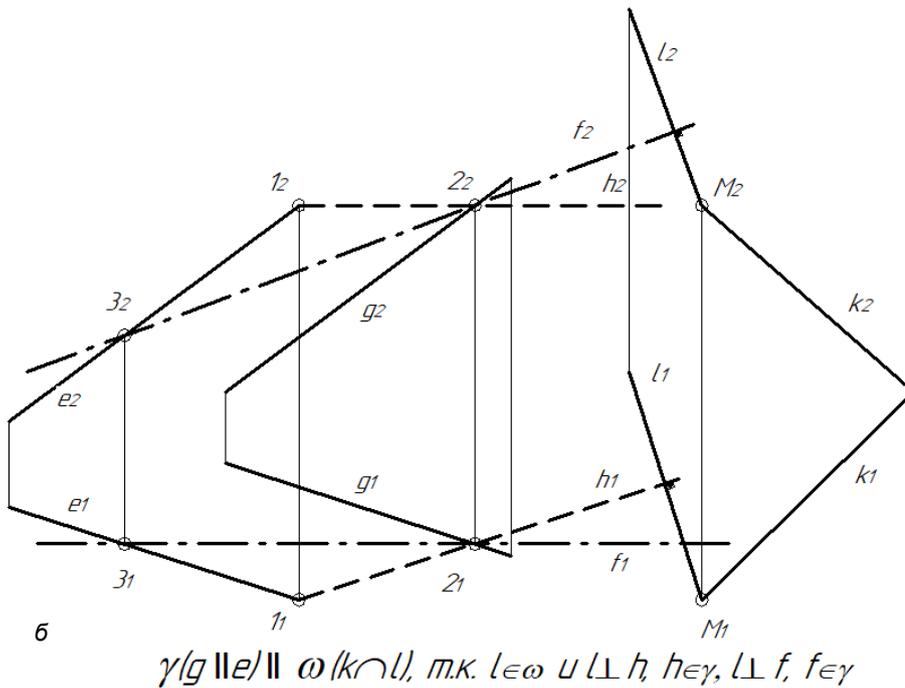


Рис. 4.22 (окончание)

5. РЕШЕНИЕ ПОЗИЦИОННЫХ ЗАДАЧ

5.1. Построение линии пересечения двух плоскостей общего положения

Для построения линии пересечения двух плоскостей необходимо и достаточно иметь две общие точки. На рис. 5.1, а показано наглядное изображение решения задачи. Плоскость $\alpha(ABC)$, плоскость $\beta(a \parallel b)$. Построить две вспомогательные плоскости любого частного положения γ и ω . Плоскость γ пересечет исходные плоскости по отрезкам $12 = \alpha \cap \gamma$ и $34 = \beta \cap \gamma$. Эти линии пересекутся в общей точке $K = 12 \cap 34$. Вторая плоскость ω соответственно пересечется с исходными плоскостями по отрезкам: $56 = \alpha \cap \omega$ и $78 = \beta \cap \omega$. Их общей точкой будет $N = 56 \cap 78$. Соединив искомые точки, получим линию пересечения плоскостей $KN = \alpha \cap \beta$. На рис. 5.1, б показано решение задачи на ортогональном чертеже.

На эпюре плоскости явно не пересекаются, но построить их теоретическую линию пересечения возможно.

При решении этой задачи были использованы две плоскости горизонтального уровня (параллельные горизонтальной плоскости проекций заданы своими собирательными следами: $\gamma(\gamma_2)$ и $\omega(\omega_2)$). При решении такого типа задач можно использовать любые плоскости частного положения, алгоритм остается неизменным.

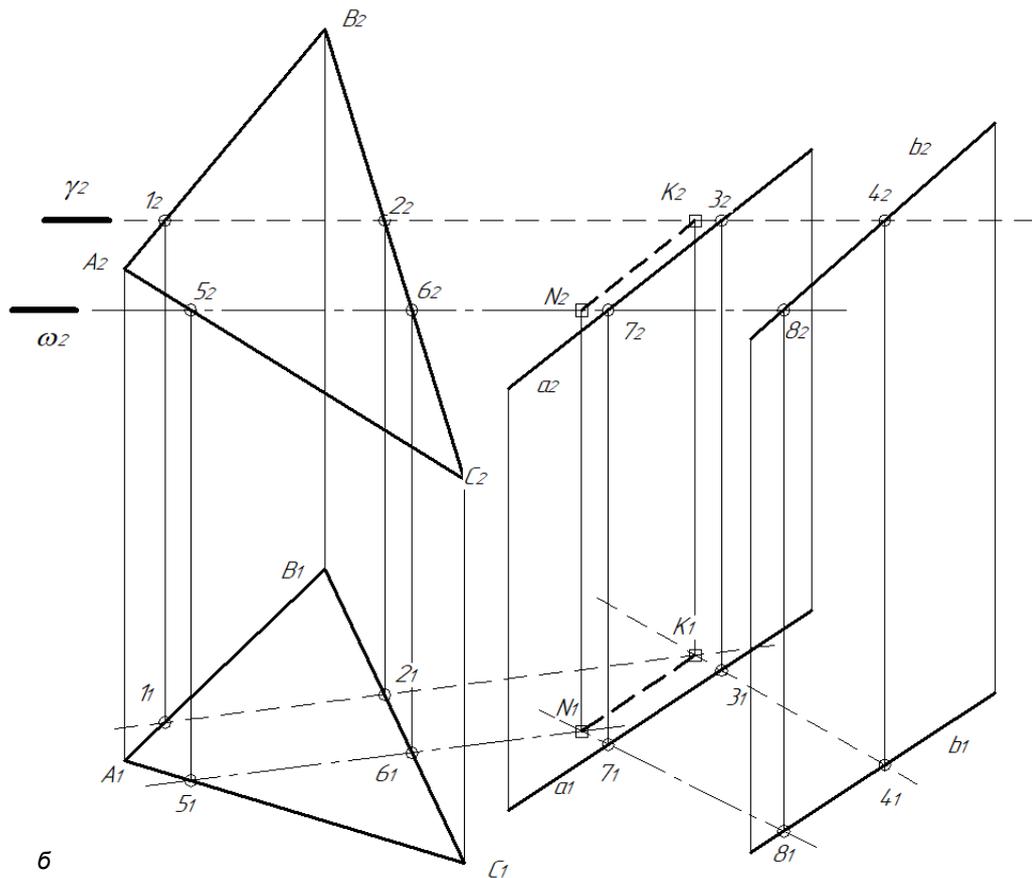
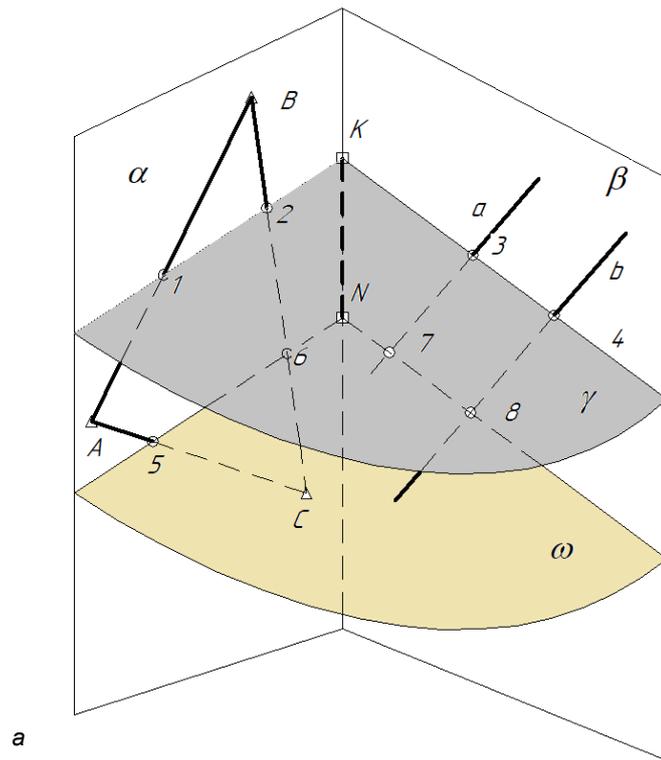


Рис. 5.1

5.2. Определение точки пересечения прямой и плоскости общего положения, определение видимости прямой

Задачу на определение точки пересечения прямой и плоскости общего положения называют *первой основной задачей* начертательной геометрии. Решают ее, воспользовавшись любой вспомогательной плоскостью частного положения. Например, найдем точку встречи (пересечения) плоскости μ и прямой m . Для этого заключим прямую m во вспомогательную плоскость γ (рис. 5.2, а). Построим линию пересечения плоскостей μ и γ отрезок 12. В точке, где линия 12 пересечется с линией m , находится точка встречи K . Покажем решение сначала на наглядном изображении, а потом на эюре.

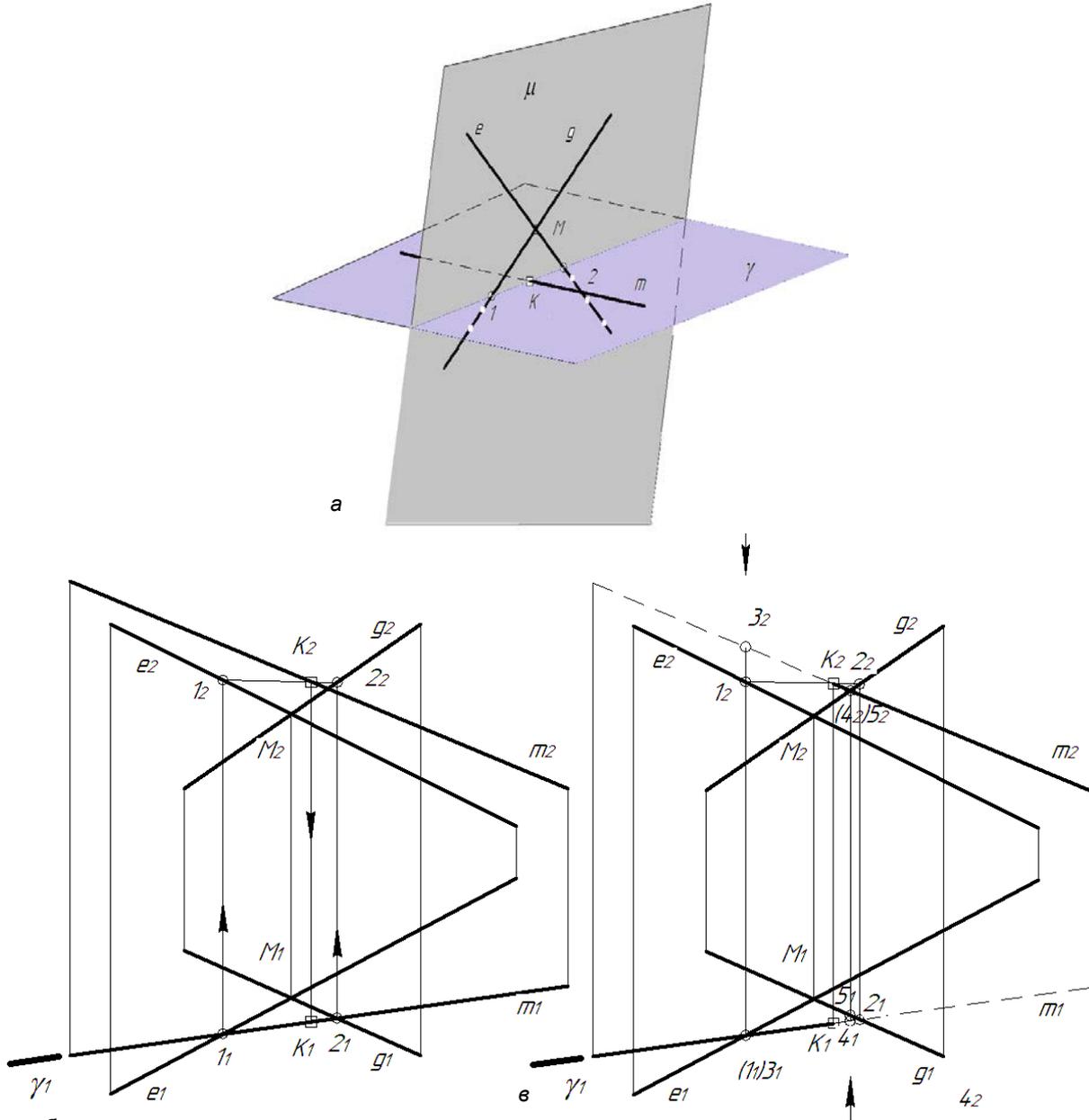


Рис. 5.2

При решении задачи на ортогональном чертеже видно, что прямую m удобнее заключить в горизонтально-проецирующую плоскость, тогда сразу видны две проекции точек пересечения μ и γ (рис. 5.2, б). Проецирующая плоскость $\gamma(\gamma_1)$ обладает собирательной способностью на π_1 . У плоскости $\mu(e \cap g = M)$ на горизонтальной проекции есть точки 1 и 2, фронтальные проекции этих точек найдем по линиям ортогональной связи. Соединив линию 12 на π_2 , найдем фронтальную проекцию точки встречи: $K_2 = 1_2 2_2 \cap m_2$. По линии ортогональной связи найдем K_1 из условия принадлежности m_1 .

С помощью конкурирующих точек определим видимость прямой m (рис. 5.2, в). На горизонтальной проекции конкурируют $1_1 \equiv 3_1$. Показав на фронтальной проекции точку $3 \in e$, посмотрим на точки 1 и 3 со стороны координаты z , видим $z_3 > z_1$, поэтому на горизонтальной проекции наблюдателю видима будет левая часть m_1 до горизонтальной проекции точки встречи K_1 , пройдя точку встречи линия становится невидимой. На фронтальной проекции конкурируют $4_2 \equiv 5_2$. Найдя горизонтальные проекции точек 4 и 5, проведя направление взгляда наблюдателя по их линии связи на π_1 со стороны координаты y , видим, что $y_4 > y_5$. На фронтальной проекции π_2 видимой будет правая часть m до фронтальной проекции точки встречи K_2 . После прохождения точки встречи m_2 станет невидимой для наблюдателя.

5.3. Определение расстояния от точки пространства M до заданной плоскости

Задачу следует рассматривать поэтапно. Пусть наша плоскость $\alpha(P; \alpha_\tau)$ (рис. 5.3, а).

1. Перезададим плоскость на эюре $\alpha(P; 1; 2)$. Точки 1 и 2 возьмем на линии α_τ $1_1 \equiv 1_2 \in \alpha_\tau$ и $2_1 \equiv 2_2 \in \alpha_\tau$. Соединив фронтальные и горизонтальные проекции, получим задание плоскости треугольником (рис. 5.3, б).

2. Из заданной точки пространства M необходимо провести линию $t \perp \alpha$. По теореме о перпендикулярности прямой и плоскости в плоскости $\alpha (P; \alpha_\tau)$ нужно построить главные линии плоскости – горизонталь h и фронталь f .

Горизонталь проведем через точки 2 и 3, а фронталь через точки 1 и 4.

Из точки M опустим перпендикуляр t на горизонтальной плоскости $t_1 \perp h_1$, на фронтальной плоскости $t_2 \perp f_2$ (рис. 5.3, в) (по теореме о перпендикулярности прямой и плоскости).

3. Найдем точку встречи перпендикуляра t и плоскости α . Заключим t в горизонтально-проецирующую плоскость $\gamma (t_1 \equiv \gamma_1)$. Плоскость γ пересекает плоскость α по линии 56. Линия 56 пересекается с линией t в точке K . Остается найти истинную величину MK методом прямоугольного треугольника (рис. 5.3, г). Отрезок MK на проекциях выделим основной линией для удобства чтения эюра.

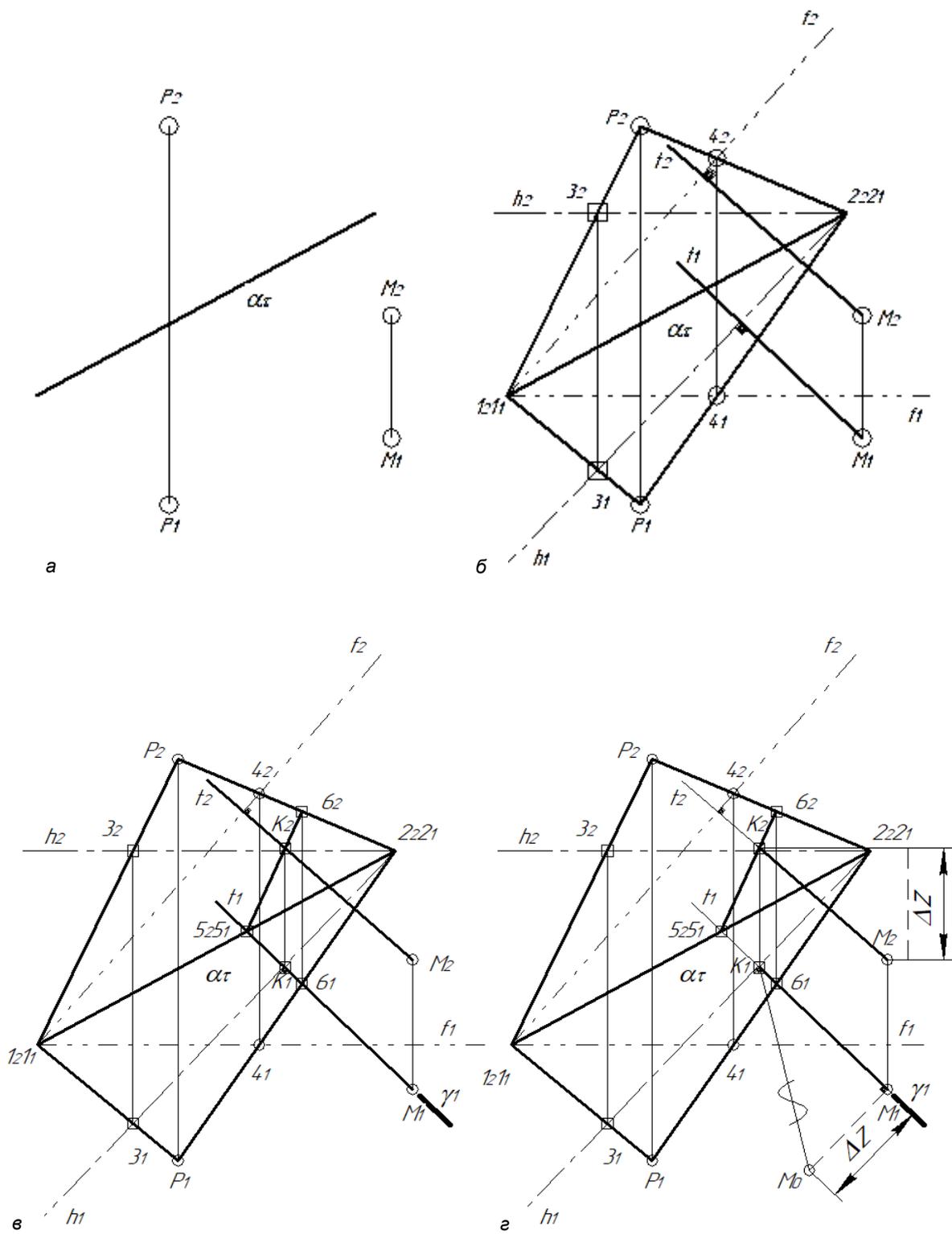


Рис. 5.3

Обратная задача. Из точки A плоскости $\beta(a1b)$ восстановите перпендикуляр $|AB|=40$ мм (рис. 5.4, а).

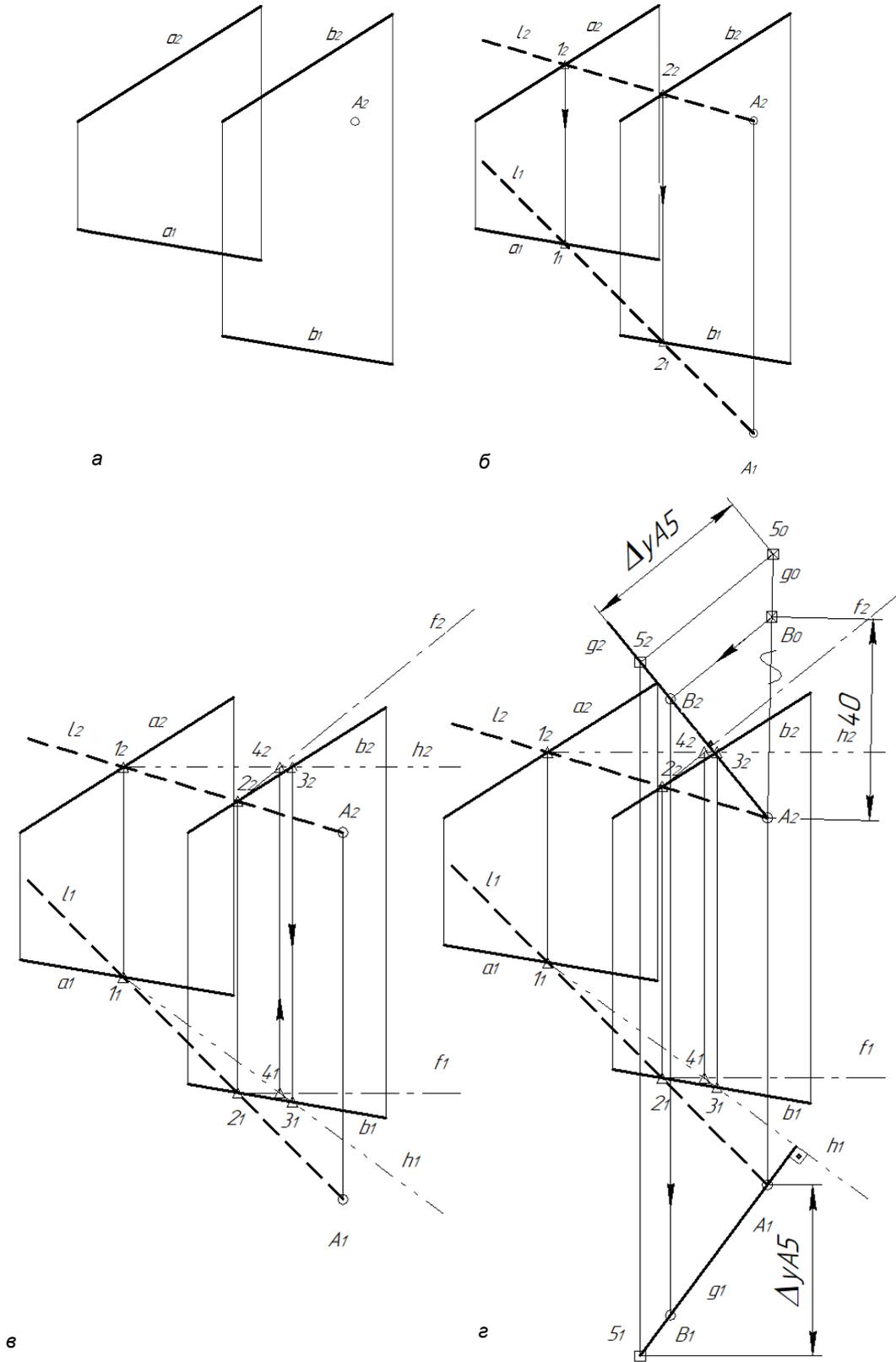


Рис. 5.4

Решение.

1. Найдем недостающую проекцию точки A , принадлежащей плоскости $\beta(a||b)$ (рис. 5.4, б). Через фронтальную проекцию точки A проведем проекцию линии l_2 , имеющую две общие точки с плоскостью $\beta(a||b)$ $l_2 \cap \beta$, найдем горизонтальные проекции точек $1_2 2_1$. Горизонтальная проекция точки $A - A_1 \in l_1$.

2. Построим главные линии плоскости через произвольные точки: $h \in l_3$, а $f \in l_2$ (рис. 5.4, в).

3. Из точки A восстановим g перпендикуляр к плоскости β ($g_1 \perp h_1, g_2 \perp f_2$) любой длины. Определим направление натуральных величин на линии $g-g_0$. На линии g возьмем произвольную точку 5 . Методом прямоугольного треугольника определим расстояние $|A5|$ через $\Delta uA5$. На направлении натуральных величин от точки A отложим отрезок $|A_2 B_0| = 40$ мм. Покажем проекции точки B на эпюре (рис. 5.4, з).

6. МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ

Решение многих задач методами начертательной геометрии часто сводится либо к решению *позиционных задач* (решение таких задач направлено на взаимное расположение геометрических фигур), либо *метрических* (определяющих истинные размеры элементов: расстояния между различными точками фигуры, определение углов и прочее).

Ранее уже было доказано, что размеры проекций плоских фигур зависят от их положения по отношению к плоскостям проекций. Будем использовать различные методы, чтобы перейти от *общего положения* к *частному*.

6.1. Метод перемены плоскостей проекций

Превращение общего положения фигуры в частное при методе перемены плоскостей проекций (МППП) происходит за счет замены исходных плоскостей проекций на нужные нам плоскости. Замена происходит в два этапа: 1) отказываются от одной плоскости проекций, перенося на новую старые координаты; 2) отказываются и от второй исходной плоскости проекций. Рассмотрим наглядное изображение и эпюр метода перемены плоскостей проекций на рис. 6.1.

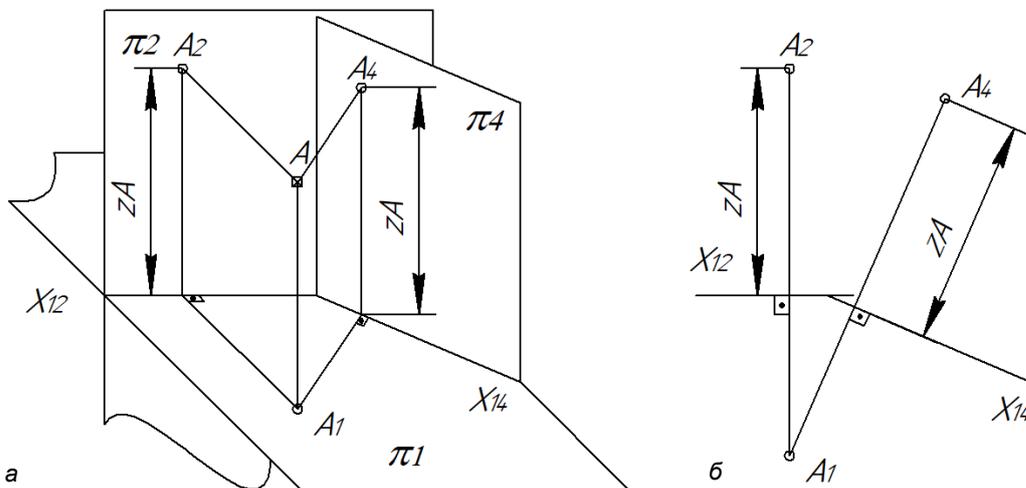


Рис. 6.1

После замены системы плоскостей проекций $X_{12} \frac{\pi_2}{\pi_1}$ на $X_{14} \frac{\pi_4}{\pi_1}$ (рис. 6.1, а) на наглядном изображении горизонтальная плоскость проекций остается на месте, вместо фронтальной плоскости проекций π_2 берем новую плоскость проекций π_4 . (π_3 не называем, так как это именная плоскость – профильная плоскость проекций.) Новая плоскость проекций взята произвольным образом, но

она должна быть перпендикулярна плоскости проекций π_1 (должна остаться система ортогонального проецирования). На эюре (рис. 6.1, б) A_1A_4 – новая линия ортогональной связи, она перпендикулярна новой оси x_{14} . Расстояние от новой оси x_{14} до проекции на π_4 равно координате z_A , снятой на π_2 от старой оси x_{12} до фронтальной проекции точки $A - A_2$.

Можно также заменить π_1 , оставив π_2 . Данный метод предпочтительно использовать при решениях множества задач: *позиционных и метрических*. Существуют два алгоритма: для прямой и для плоскости.

6.1.1. Алгоритм для прямой

Этот алгоритм решает следующие задачи:

- определение расстояния от точки M до заданной прямой a общего положения (задача 6.1);
- построение точки N , симметричной точке M , относительно прямой b общего положения (задача 6.2);
- определение расстояния между параллельными прямыми c и d (задача 6.3);
- определение расстояния между скрещивающимися линиями r и k (задача 6.4);
- определение натуральной величины двухгранного угла между плоскостями $\alpha(ABC)$ и $\beta(BCD)$. При этом, несмотря на присутствие двух плоскостей, главной является линия их пересечения BC (задача 6.5).

Суть алгоритма сводится к следующему: в системе плоскостей проекций $x_{12} \frac{\pi_2}{\pi_1}$ выбранная прямая занимает общее положение, превратим ее сначала в линию уровня, параллельную π_4 , а затем в проецирующую прямую – перпендикулярную π_5 .

Задача 6.1. Определите расстояние от точки до прямой.

Решение.

Найдем расстояние от точки M до заданной линии a общего положения (рис. 6.2, а).

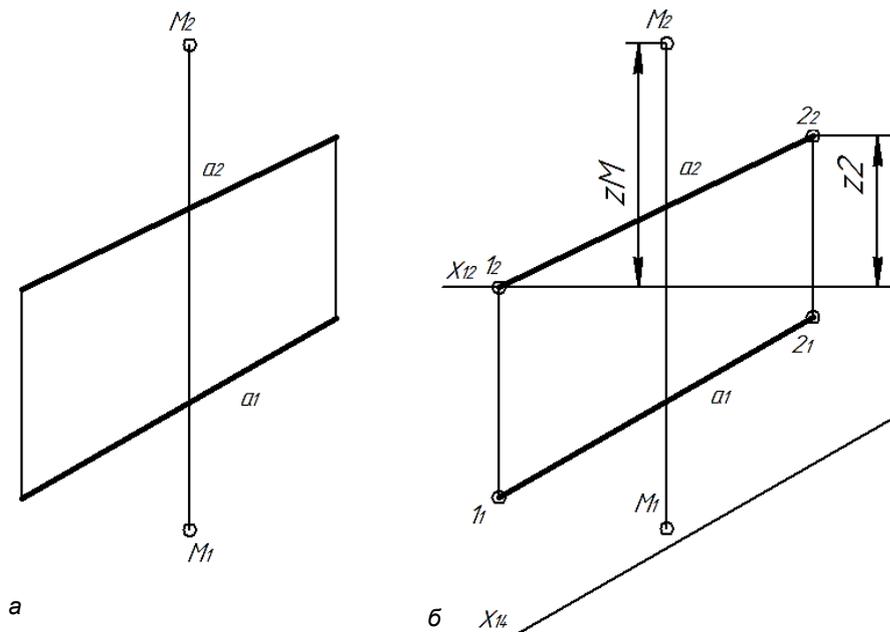


Рис. 6.2 (начало)

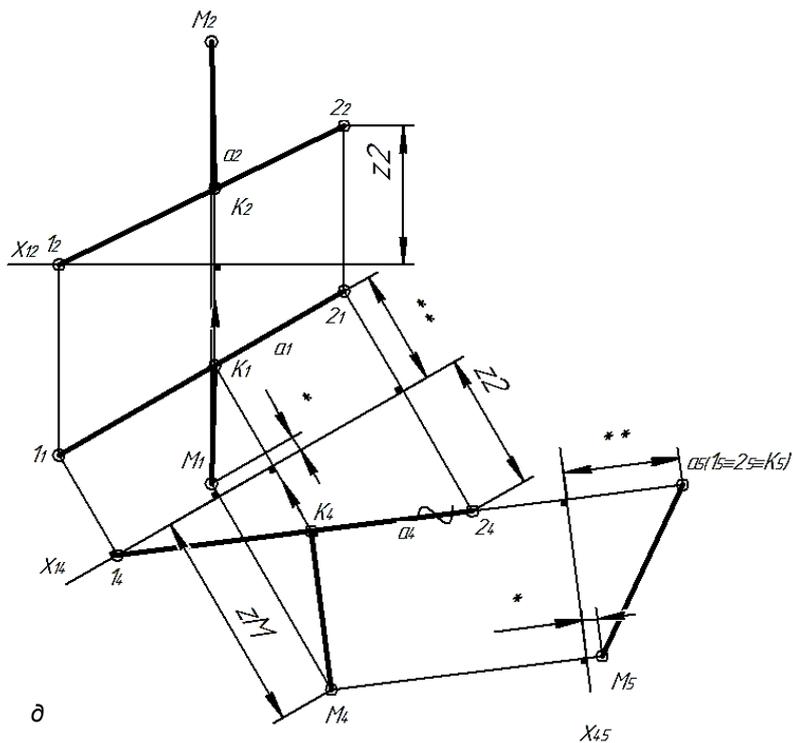
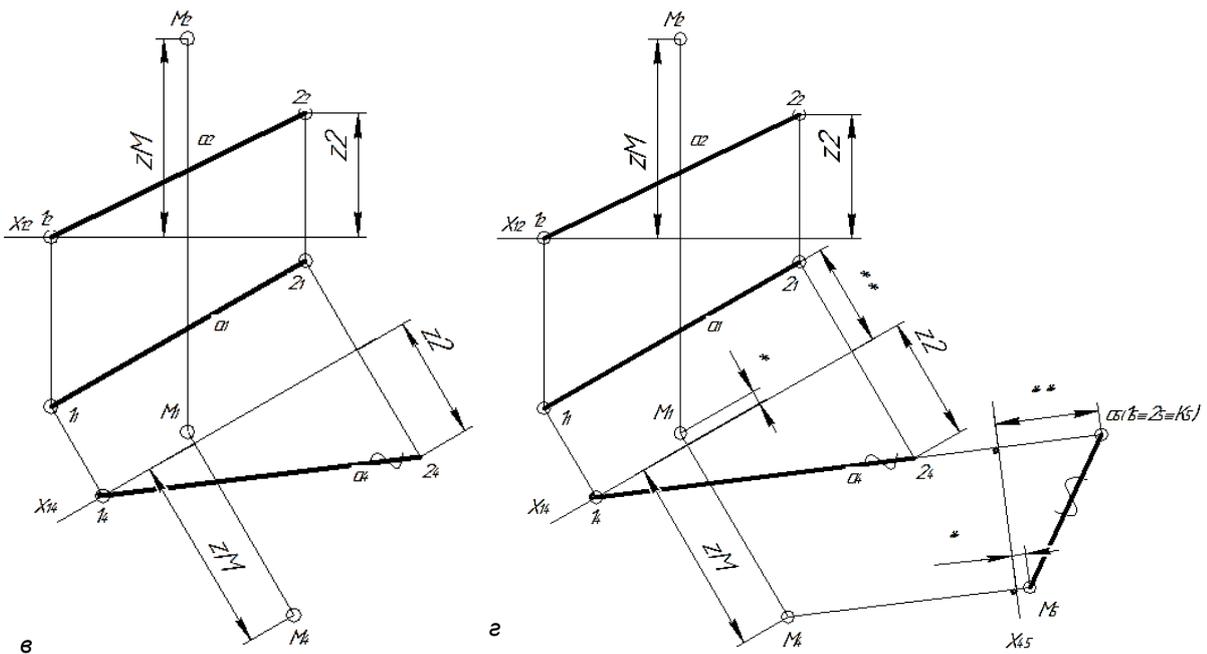


Рис. 6.2 (окончание)

1) Заданная линия a занимает общее положение. Превратим ее в линию уровня, параллельную новой плоскости проекций π_4 . Ограничим линию a отрезком 12 . Откажемся от системы плоскостей проекций $X_{12}^{\pi_2} / X_{14}^{\pi_1}$ в пользу $X_{14}^{\pi_4} / X_{45}^{\pi_5}$. Провести X_{12} можно в любом месте, но лучше провести первую ось через самую низкую проекцию точки с индексом 2 , чтобы не было отрицательных координат z у точек (рис. 6.2, б).

2) Новую ось x_{14} , не разделяя горизонтальные проекции заданных точек, проведем на любом удалении от горизонтальной проекции линии $a - a_1$ (новая плоскость π_4 будет параллельна линии a). Построим новые линии ортогональной связи, перпендикулярные оси x_{14} , из всех горизонтальных проекций точек (тем самым подтвердим ортогональность новой системы плоскостей проекций). На плоскости π_4 по линиям ортогональных связей отложим старые координаты z (рис. 6.2, в). Соединив одноименные проекции 1_4 и 2_4 , получим новую проекцию линии a на $\pi_4 - a_4$. На π_4 увидим: истинную величину отрезка $|12| = |1_4 2_4|$ и угол φ° проецируется здесь без искажения (угол наклона отрезка 12 к горизонтальной плоскости проекций π_1).

3) Следующим шагом поставим a в положение проецирующей прямой: $a \perp \pi_5$. Из системы плоскостей $X_{14} \frac{\pi_4}{\pi_1}$ перейдем в систему $X_{45} \frac{\pi_4}{\pi_5}$. Для этого проведем новую ось x_{45} в любом месте (не разделяя проекции точек с индексом 4 (рис. 6.2, г). Построим новые линии ортогональной связи из всех проекций точек с индексом 4 перпендикулярно новой оси x_{45} на проекции π_5 отложим старые координаты, снятые на π_1 от оси x_{14} до горизонтальных проекций точек. Это произвольные расстояния, не параллельные ни одной координате, обозначим их через $*$ и $**$. Линия a на π_5 спроецировалась вырождено (проекция $1_5 \equiv 2_5$). Расстояние $|MK| = |M_5 K_5|$.

4) Необходимо вернуть проекции этого расстояния на все плоскости. На π_4 прямой угол спроецируется без искажения $M_4 K_4 \perp a_4$. Зная, что точка $K \in a$, найдем ее проекции по соответствующим линиям ортогональной связи: $K_4 K_1 \perp x_{14}$, $K_1 K_2 \perp x_{12}$ (рис. 6.2, д). Одноименные проекции MK соединим на всех проекциях.

Задача 6.2. Постройте точку N , симметричную заданной точке M , относительно прямой k общего положения.

Решение.

Рассмотрим решение задачи на определение точки N , симметричной точке M , относительно заданной прямой b (рис. 6.3, а).

1) На рисунке показано, что заданная линия пространства b занимает общее положение. Ограничим концы линии отрезком 12 . Для решения этой задачи нам необходимо превратить линию b в линию уровня, параллельную π_4 . Заменяем горизонтальную проекцию π_1 на новую плоскость π_4 , т.е. перейдем от системы плоскостей проекций $X_{12} \frac{\pi_2}{\pi_1}$ к системе $X_{24} \frac{\pi_2}{\pi_4}$. Первую ось x_{12} проведем через точку с самой маленькой координатой y , через горизонтальную проекцию точки 2 (рис. 6.3, б). Новая плоскость проекций π_4 должна быть перпендикулярна старой проекции π_2 (что подтвердит проведенная перпендикулярно новой оси x_{24} линия ортогональной связи 2_4), и параллельна заданной линии b (новую ось x_{24} проведем параллельно горизонтальной проекции b_1 на любом удалении, не разделяя проекции точек с индексом 2). Покажем старые координаты y точек 1 и M . Координата y_2 точки 2 нулевая, так как ее горизонтальная проекция лежит на оси x_{12} .

2) Определим проекции точек на π_4 , построив новые линии ортогональной связи и отложим на них старые координаты y . На π_4 увидим кратчайшее расстояние от точки M до заданной линии b (по теореме о проецировании прямого угла) $M_4 K_4 \perp b_4$, где K – основание перпендикуляра, опущенного из точки M . Отложим $|M_4 K_4| = |K_4 N_4|$, найдем проекцию точки N , симметричную точке M (рис. 6.3, в). По линиям связи вернем проекции точек N и K сначала на π_2 , а потом на π_1 . На всех проекциях сохраняется равенство: $|M_2 K_2| = |K_2 N_2|$, $|M_1 K_1| = |K_1 N_1|$.

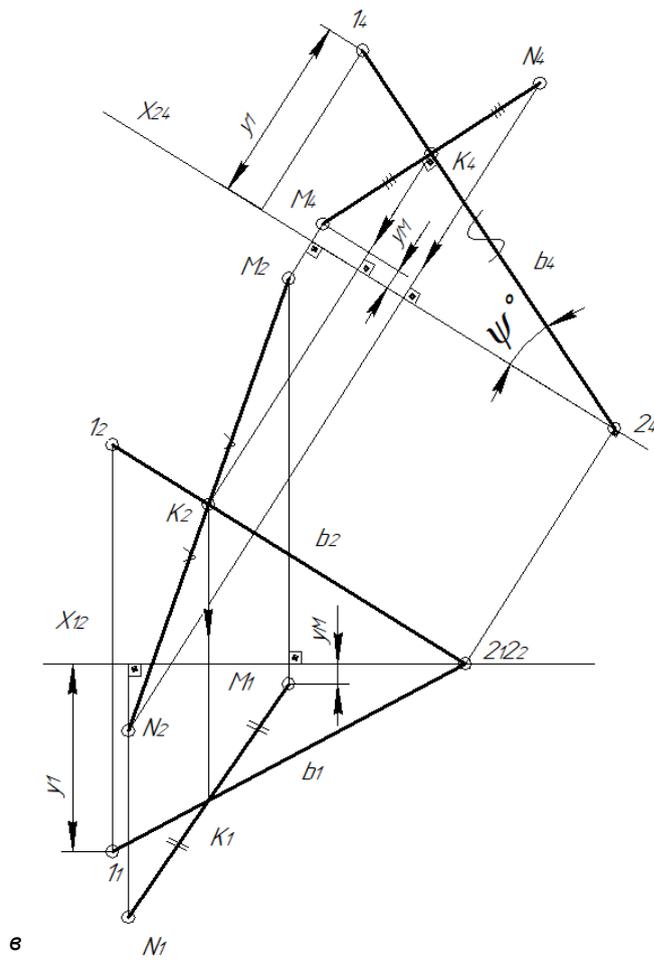
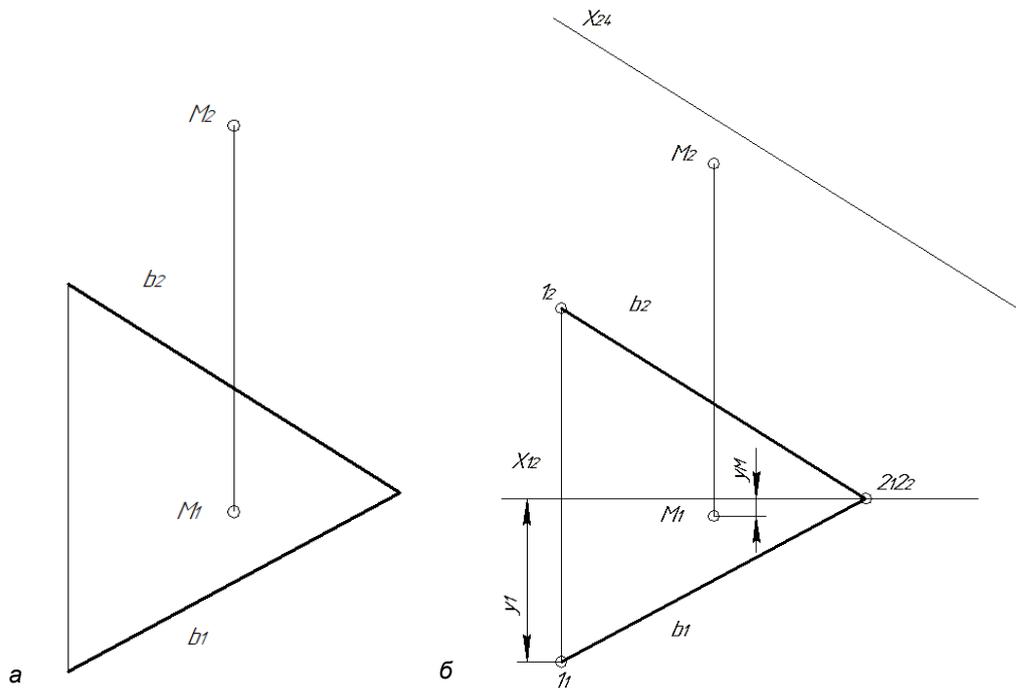


Рис. 6.3

Задача 6.3. Определите расстояния между параллельными прямыми.

Задача на определение расстояния между параллельными прямыми $c1d$ (рис. 6.4, а) происходит по алгоритму задачи 6.1.

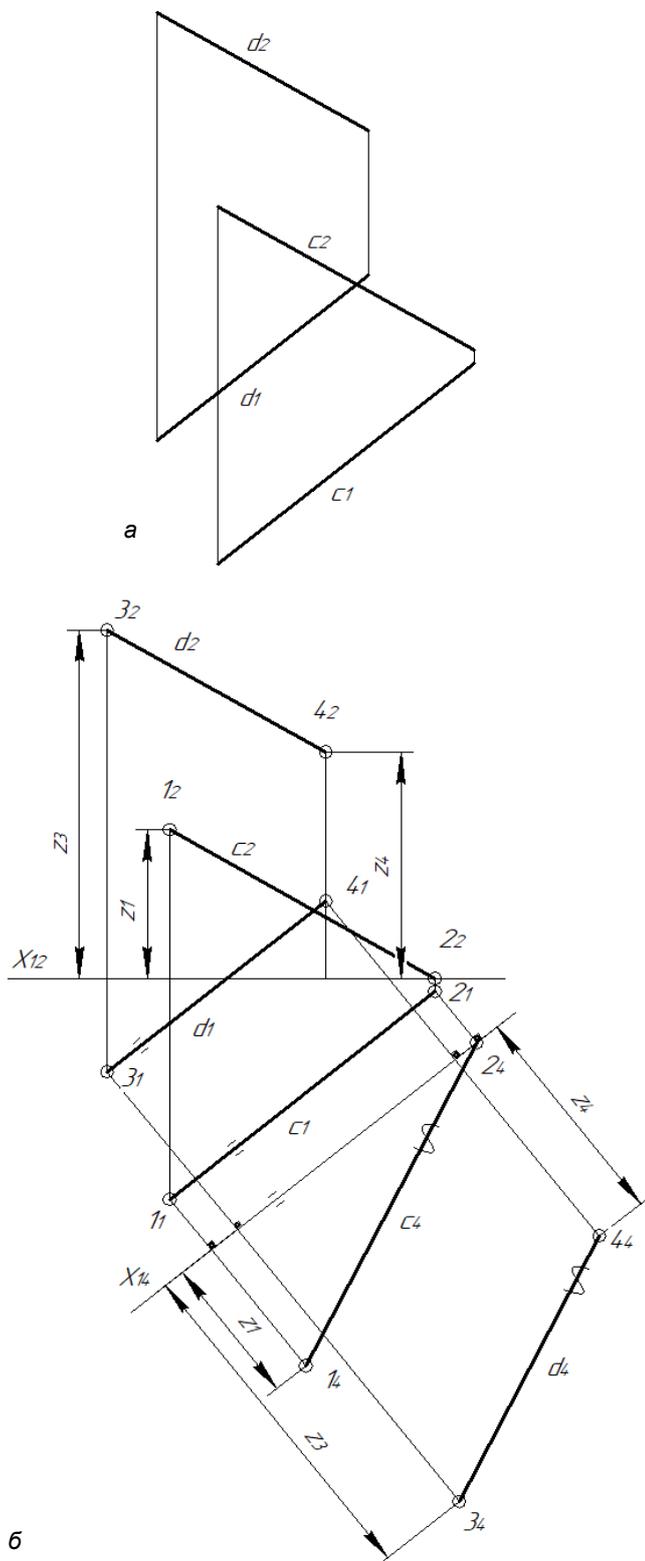


Рис. 6.4 (начало)

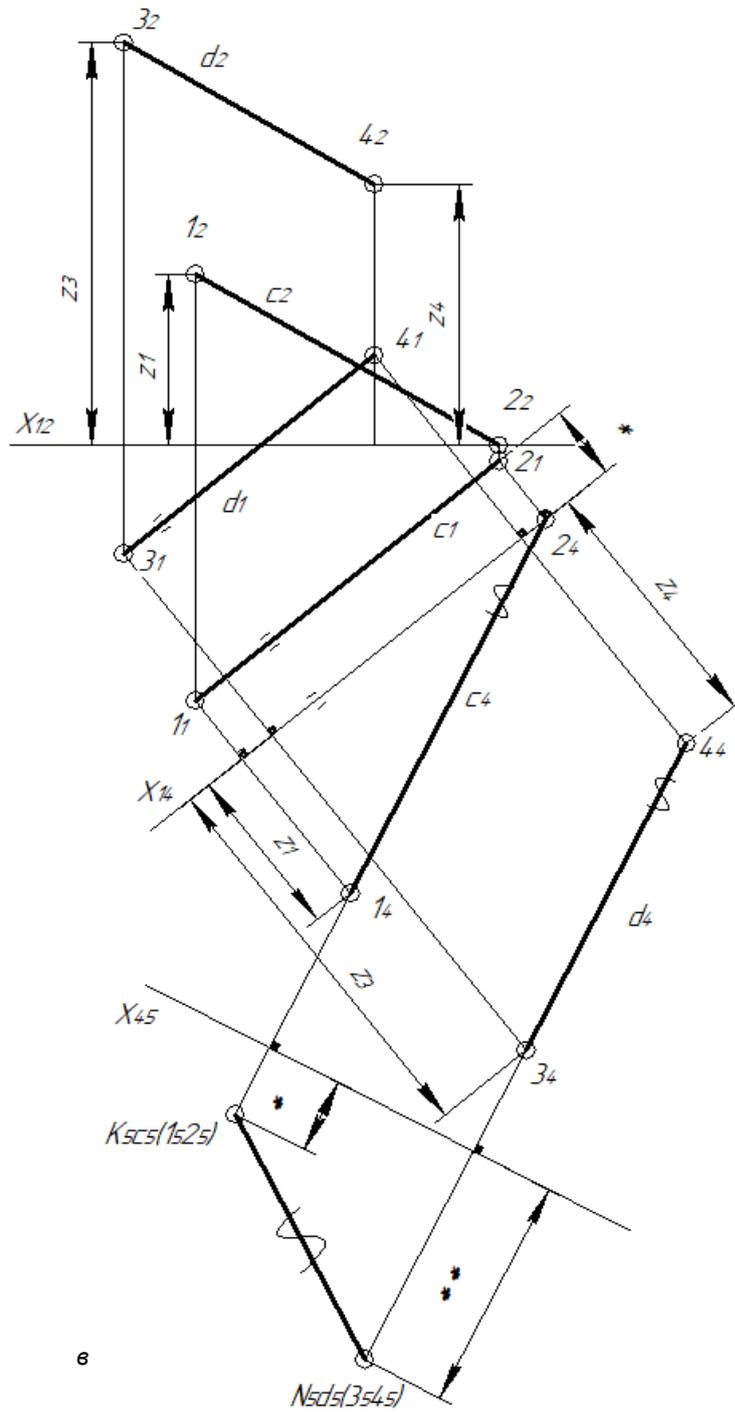


Рис. 6.4 (продолжение)

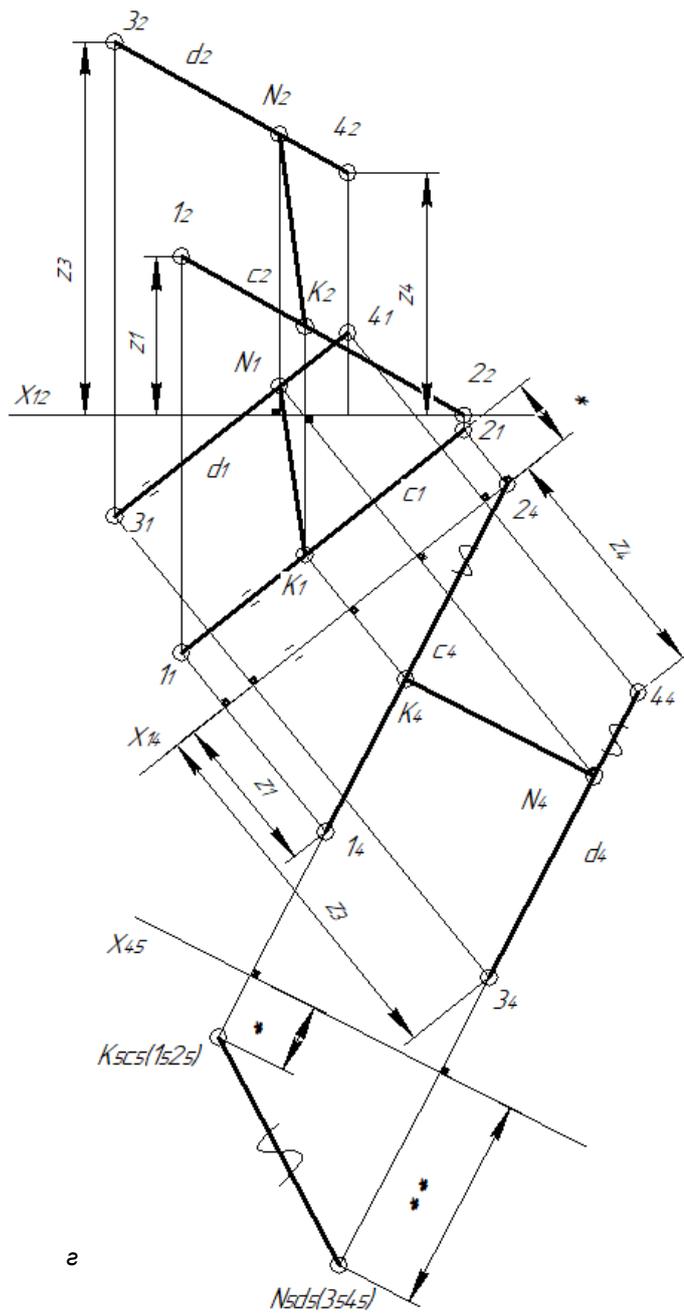


Рис. 6.4 (окончание)

Решение.

1) В системе плоскостей проекций $X_{12}^{\frac{\pi_2}{\pi_1}}$ линии c и d занимают общее положение. Ограничим линии отрезками 12 и 34 . Превратим эти линии в линии уровня, перейдя к системе $X_{14}^{\frac{\pi_4}{\pi_1}}$, где новая плоскость проекций будет параллельна c и d . Первую ось x_{12} проведем через проекцию точки c с самой маленькой координатой z . Вторую ось x_{14} проведем на любом удалении от горизонтальных проекций линий c и d (не разделяя горизонтальные проекции точек) параллельно c_1 и d_1 (рис. 6.4, б). Снимем старые координаты z точек $1, 2, 3$ и 4 и перенесем их по новым линиям ортогональных связей на проекцию π_4 . Покажем c_4 и d_4 . Здесь отрезки 12 и 34 спроецировались в натуральную величину.

2) Откажемся от проекции на π_1 в пользу π_5 . Превратим линии s и d в проецирующие прямые, т.е. перейдем от системы $X_{14} \frac{\pi_4}{\pi_1} \Rightarrow X_{45} \frac{\pi_4}{\pi_5}$. Новую плоскость проекций π_5 возьмем перпендикулярно линиям s и d . Для этого третью ось проекций x_{45} расположим в любом месте эюра перпендикулярно s_4 и d_4 (все проекции точек на π_4 должны остаться по одну сторону от оси x_{45}) (рис. 6.4, в). Построим новые линии ортогональной связи, перпендикулярные x_{45} . Отказываясь от проекции на π_1 , измерим все расстояния от оси x_{14} до горизонтальных проекций точек $1_1 2_1$ – это расстояние $*$, а до $3_1 4_1$ – $**$. Перенесем их на π_5 , получим вырожденные проекции линий s и d . Соединив вырожденные проекции, получим кратчайшее расстояние между параллельными прямыми. Обозначим это расстояние конкретным отрезком $IKM=IK_5N_5l$, где $K \in s$, $N \in d$.

3) Вернем проекции точек K и N на π_4 (рис. 6.4, е). Первую проекцию точки K_4 расположим в любом удобном для нас месте на проекции s_4 . По теореме о проецировании прямого угла увидим $K_4 N_4 \perp d_4$. Далее линии ортогональной связи $K_4 K_1 \perp x_{14}$, $N_4 N_1 \perp x_{14}$ и $K_1 K_2 \perp x_{12}$, $N_1 N_2 \perp x_{12}$. Одноименные проекции точек KN соединим основной линией. Задача решена.

Задача 6.4. Определите расстояния между скрещивающимися линиями.

Решение.

Задача на определение расстояния между скрещивающимися линиями r и k решается при условии, что по отношению к одной выбранной линии выполняется замена плоскости, например, π_1 на π_4 , $\pi_4 \parallel r$. Превращаем линию общего положения r в линию уровня. Вторая линия k останется линией общего положения. Далее заменяем π_2 на $\pi_5 \perp r$. Все этапы решения показаны на рис. 6.5.

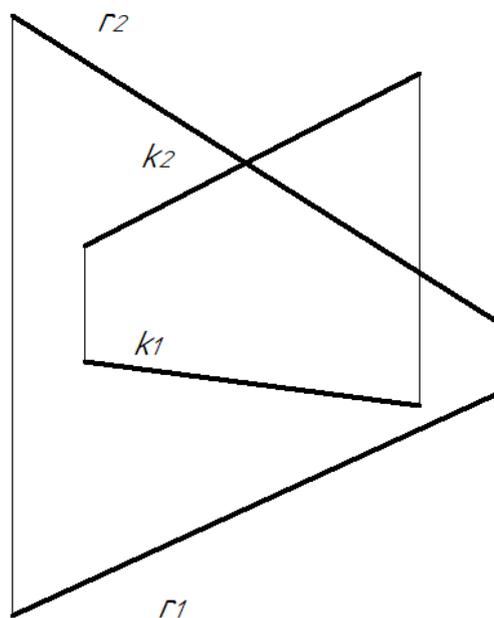


Рис. 6.5 (начало)

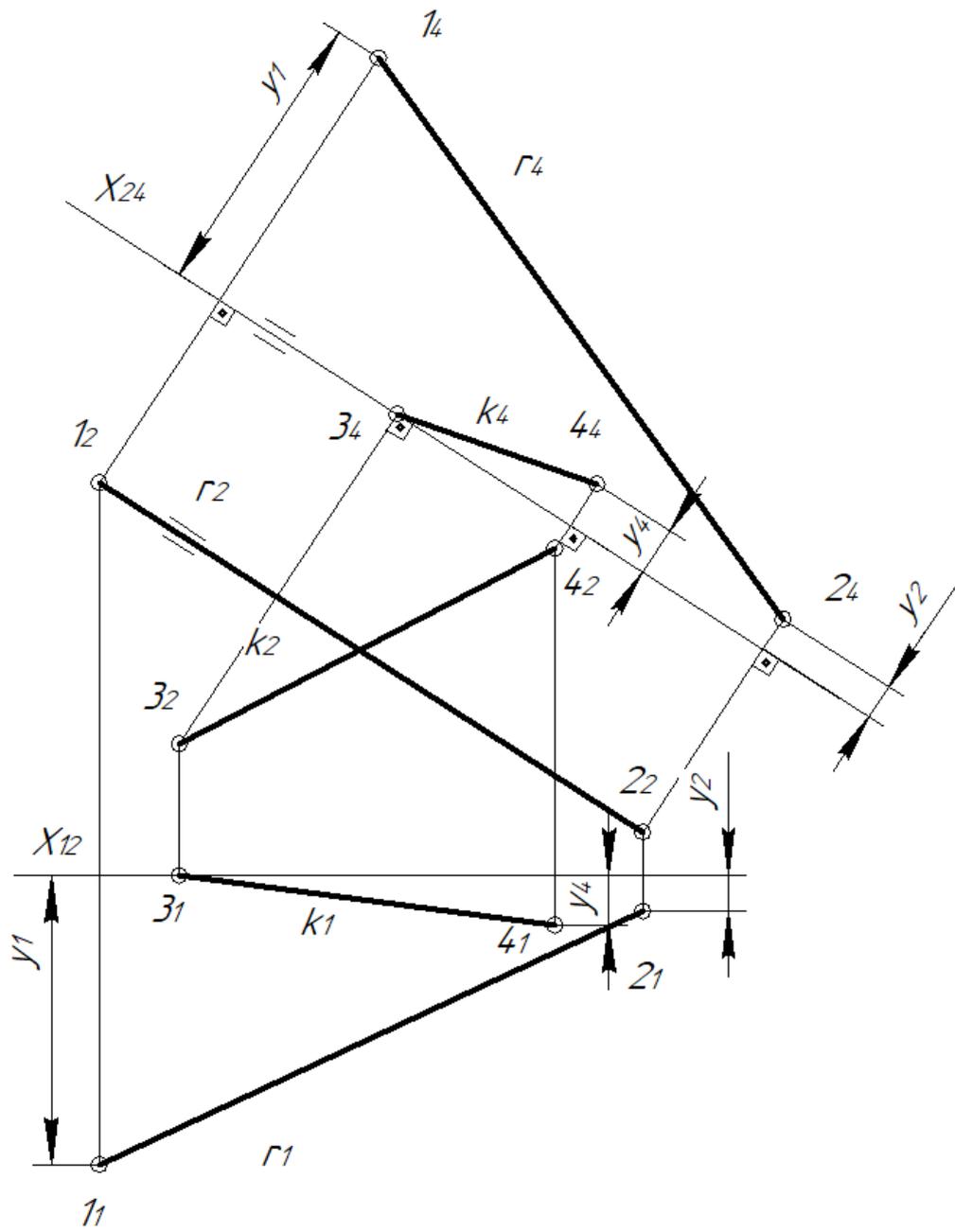


Рис. 6.5 (продолжение)

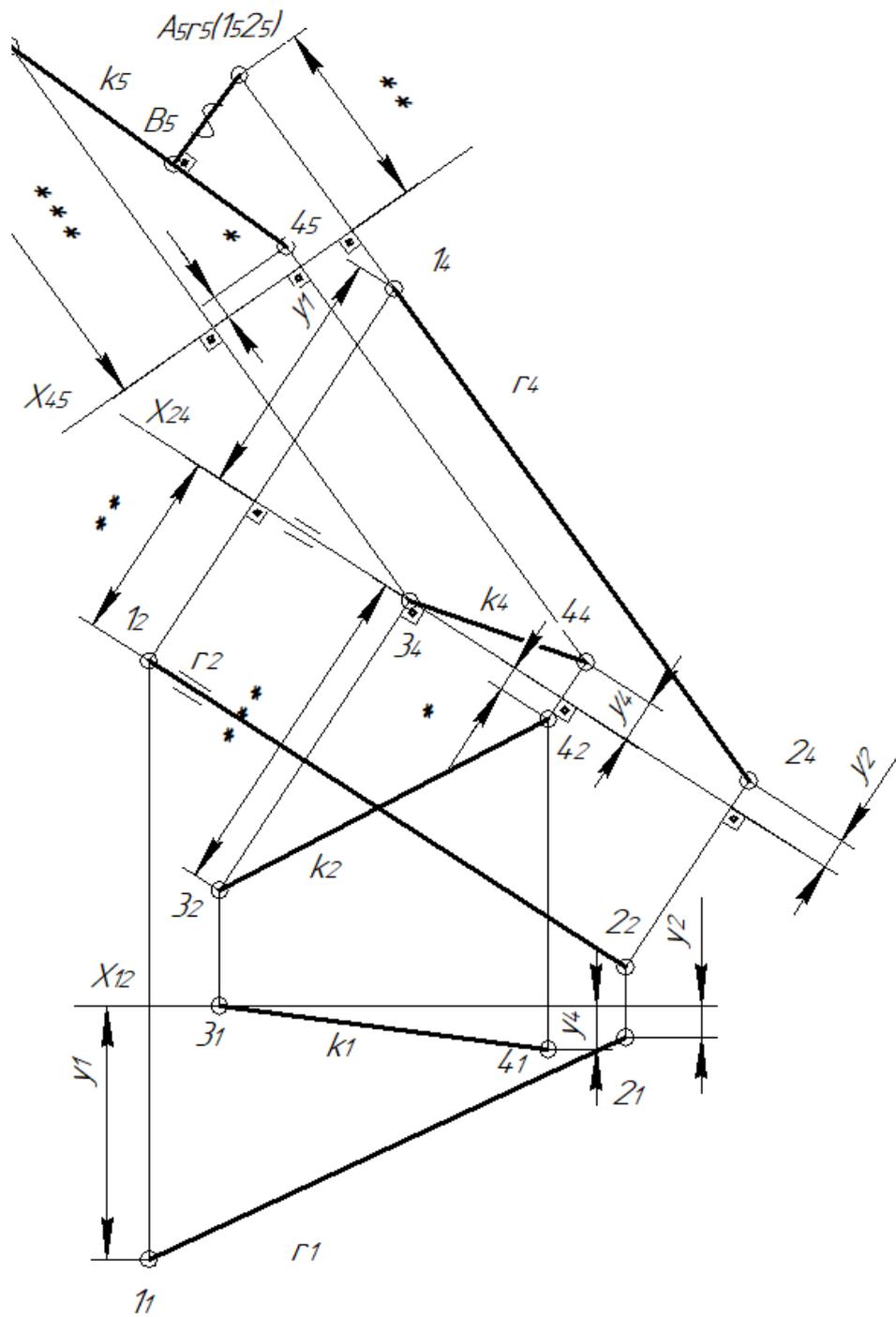


Рис. 6.5 (продолжение)

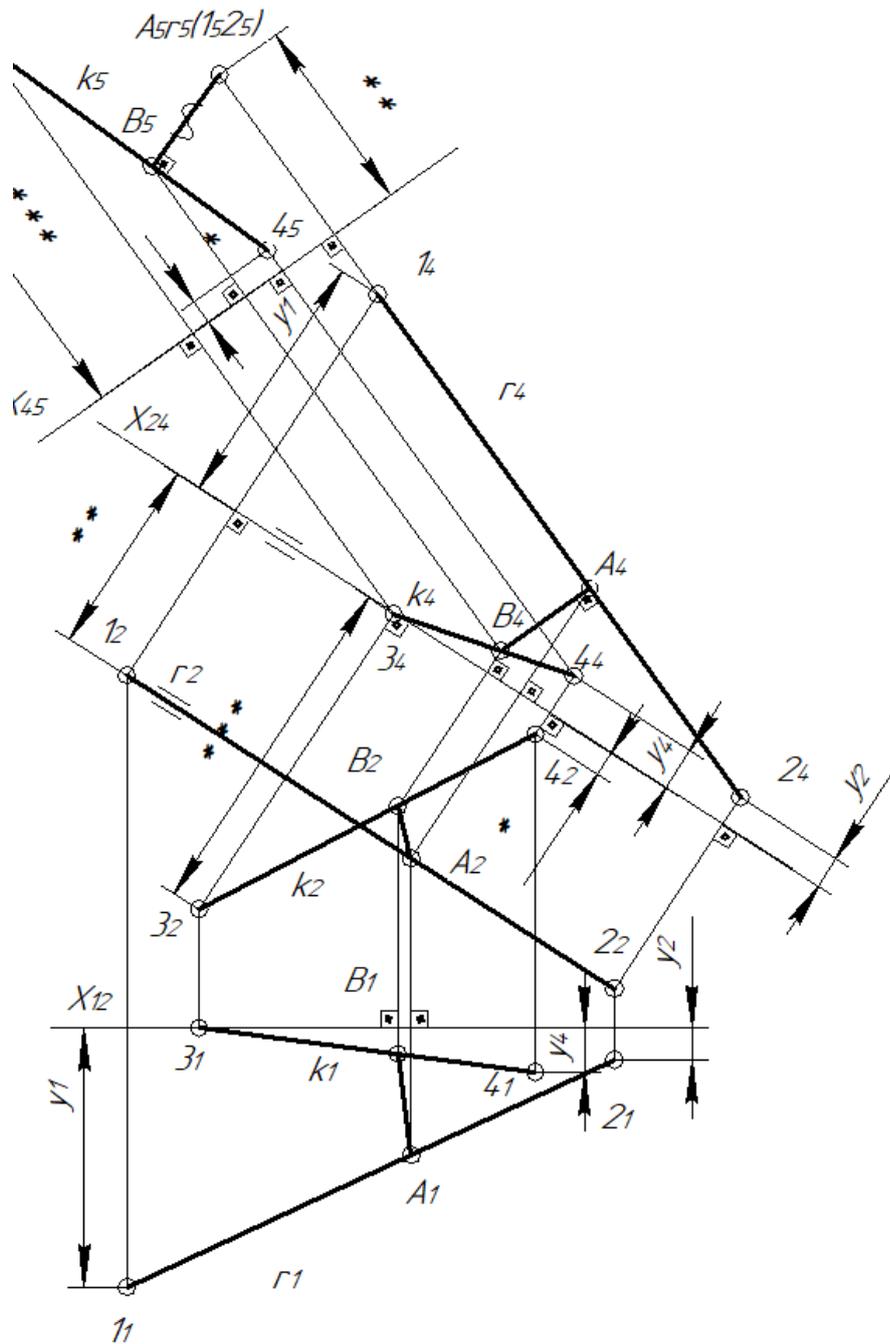


Рис. 6.5 (окончание)

Отметим, что после второй замены на плоскости проекций π_5 линия r стала вырожденной. Из вырожденной проекции r_5 опустим перпендикуляр ко второй проекции k_5 , получим проекцию A_5B_5 – кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми. $|A_5B_5| = |AB|$, где $A \in r$, $B \in k$. Определим положение проекций точек A и B на всех плоскостях. Сначала построим линию связи $B_5B_4 \perp X_{45}$. На плоскости проекций π_4 линия r – линия уровня, поэтому $B_4A_4 \perp r_4$. И дальше: $B_4B_1 \perp X_{14}$, $A_4A_1 \perp X_{14}$, $B_1B_2 \perp X_{12}$, $A_1A_2 \perp X_{12}$. Одноименные проекции точек A и B соединим основной линией. Задача решена.

Задача 6.5. Определите натуральную величину двугранного угла между плоскостями.

Решение.

Заданы две пересекающиеся плоскости $\alpha(ABC)$ и $\beta(BCD)$ (рис 6.6, а). Известна линия пересечения BC . Поэтому для определения натуральной величины угла между этими плоскостями нужно линию их пересечения BC поставить сначала в положение линии уровня по отношению к новой плоскости π_4 ($BC \parallel \pi_4$) (рис. 6.6, б), а затем в положение проецирующей прямой по отношению к π_5 ($BC \perp \pi_5$). На π_5 двугранный угол спроецируется без искажения (рис. 6.6, в).

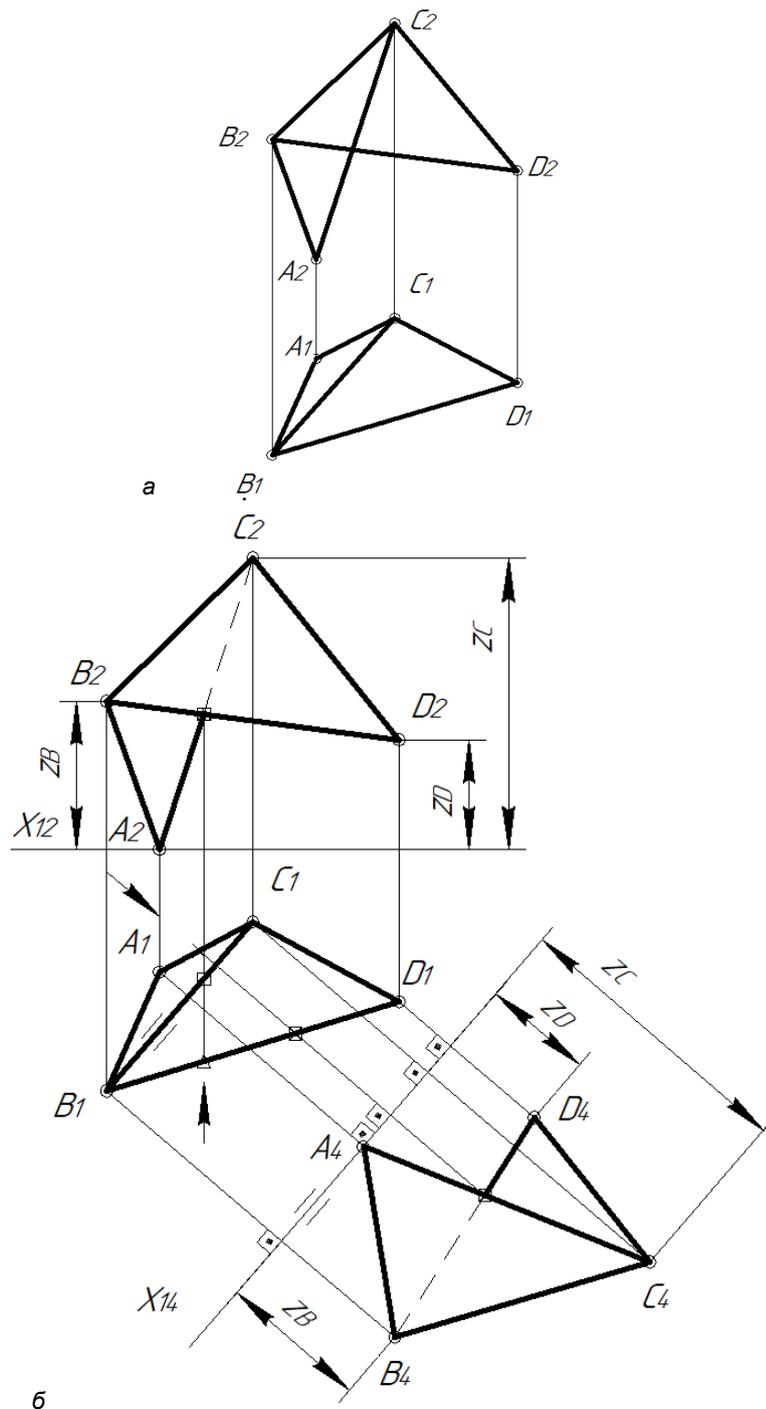


Рис. 6.6 (начало)

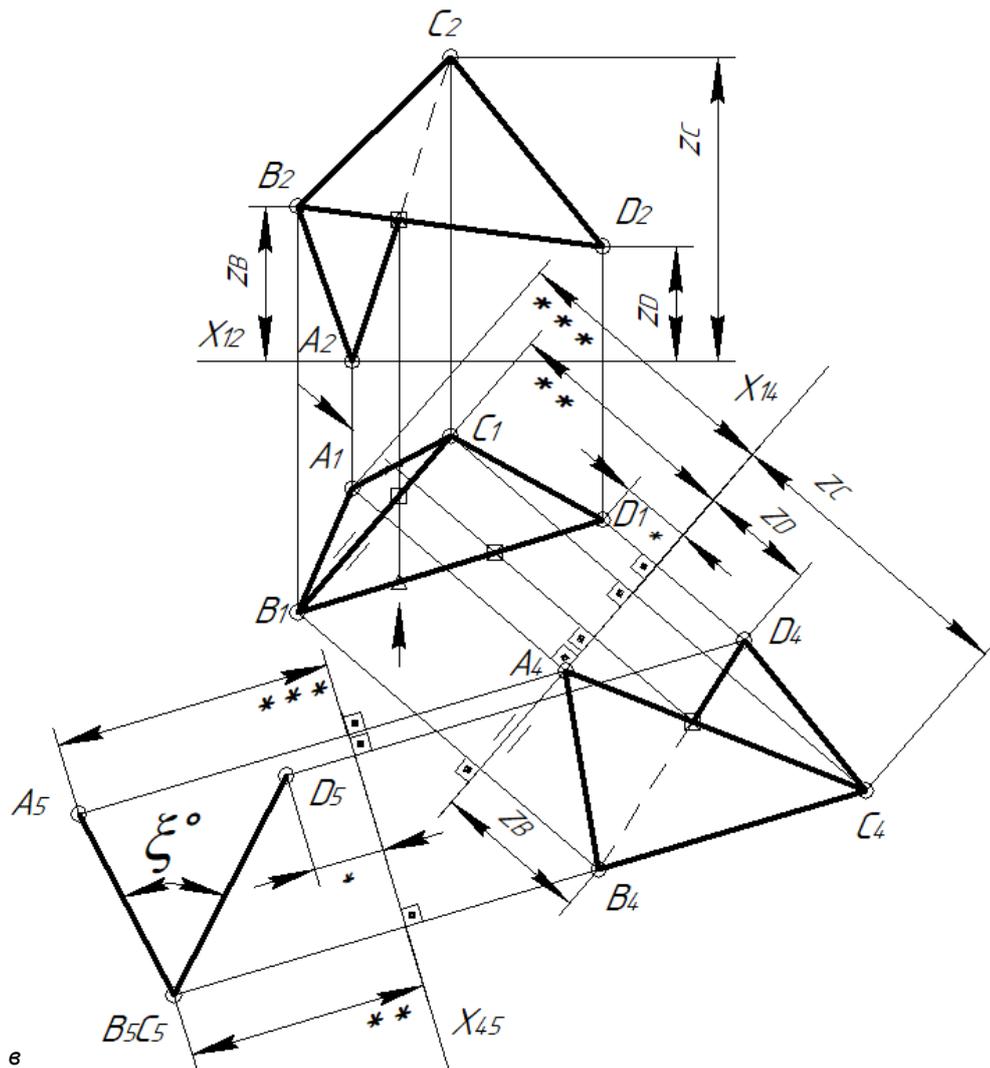


Рис. 6.6 (окончание)

При решении данной задачи необходимо определить видимость элементов с помощью конкурирующих точек. На фронтальной проекции конкурируют точки, принадлежащие отрезкам AC и BD . На горизонтальной проекции (взгляд наблюдателя указан стрелкой) видно, что координата у точки, принадлежащей BD , больше, чем у точки, принадлежащей AC . Поэтому на фронтальной проекции часть линии AC не видна наблюдателю (рис. 6.6, б). Аналогично определяется видимость конкурирующих точек на π_4 . Здесь конкурируют другие точки, принадлежащие отрезкам AC и BD . Построим линию связи этих точек, перпендикулярную оси x_{14} . Покажем взгляд наблюдателя по линии ортогональной связи со стороны π_1 в сторону π_4 стрелкой. Точка, принадлежащая AC , расположена дальше от оси x_{14} , чем точка, принадлежащая BD . Линию AC на π_4 видно целиком, а часть линии BD наблюдателю не видна.

6.1.2. Алгоритм для плоскости

В этом алгоритме следует также отказываться последовательно от системы плоскостей проекций $X_{12}^{\frac{\pi_2}{\pi_1}}$, в которых плоскость занимает общее положение в пользу, например, системы $X_{14}^{\frac{\pi_4}{\pi_1}}$, когда плоскость π_4 перпендикулярна заданной плоскости (заданная плоскость становится плоскостью частного положения – проецирующей). Затем следует поменять $X_{14}^{\frac{\pi_4}{\pi_1}}$ на $X_{45}^{\frac{\pi_4}{\pi_5}}$ так, чтобы π_5 была параллельной заданной плоскости (заданная плоскость становится плоскостью уровня). На π_5 плоскость проецируется без искажения.

Плоскости можно заменять и по другому пути:

- первая замена $X_{12}^{\frac{\pi_2}{\pi_1}} \Rightarrow X_{24}^{\frac{\pi_2}{\pi_4}}$ (плоскость π_4 перпендикулярна заданной плоскости);
- вторая замена $X_{24}^{\frac{\pi_2}{\pi_4}} \Rightarrow X_{45}^{\frac{\pi_4}{\pi_5}}$ (плоскость π_5 параллельна заданной плоскости).

Алгоритм для плоскости решает следующие задачи:

- определение расстояния от точки до плоскости общего положения (задача 6.6);
- построение точки симметричной заданной относительно плоскости общего положения (задача 6.7);
- определение точки пересечения отрезка и плоскости общего положения (задача 6.8);
- определение натуральной величины плоской фигуры (задача 6.9).

Более подробно алгоритм рассмотрим на примерах решения конкретных задач.

Задача 6.6. Определите расстояние от точки до плоскости.

Решение.

Определим расстояние от плоскости $\alpha(P; \alpha\tau)$ до заданной точки пространства M (рис. 6.7, а).

1) Перейдем от способа задания плоскости точкой и линией к заданию плоскости тремя точками. На линии $\alpha\tau$ возьмем точки AB , соединим одноименные проекции треугольника ABP .

2) Откажемся от $X_{12}^{\frac{\pi_2}{\pi_1}}$ в пользу системы плоскостей $X_{14}^{\frac{\pi_4}{\pi_1}}$.

Первую ось проекций X_{12} проведем через точку с самой маленькой координатой z . Нам нужна $\pi_4 \perp \alpha$. Проведем новую ось проекций $X_{14} \perp h_1$ – горизонтальной проекции горизонтали плоскости.

Для этого в плоскости α построим любую горизонталь. Проведем фронтальную проекцию горизонтали h_2 параллельно оси X_{12} через фронтальные проекции точек A_2 и 1_2 . По линии ортогональной связи найдем горизонтальную проекцию горизонтали h_1 . Ось X_{14} не должна разделить горизонтальные проекции точек (для удобства построения эпюра) (рис. 6.7, б).

3) Построим новые линии ортогональной связи, перпендикулярные оси X_{14} , на плоскости π_4 отложим старые координаты z каждой точки. Плоскость α спроецируется вырождено своим собирательным следом α_4 .

4) Из проекции точки M_4 опустим перпендикуляр к собирательному следу плоскости α_4 . $IM_4K_4 = IMK_1$. Проекция K_4 может иногда выпадать за пределы заданного треугольника на продолжение собирательного следа (рис. 6.7, в).

5) Вернем проекции этого расстояния на π_1 . Так как на π_4 отрезок MK спроецировался в истинную величину, значит, это линия уровня и на π_1 $M_1K_1 \parallel X_{14}$. Линия связи $K_4K_1 \perp X_{14}$, из этого условия найдем горизонтальную проекцию точки K – K_1 . Построив из K_1 линию ортогональной связи $K_1K_2 \perp X_{12}$, на плоскости проекций π_2 отложим координату z_K , снятую на π_4 от оси X_{14} до проекции K_4 (рис. 6.7, г).

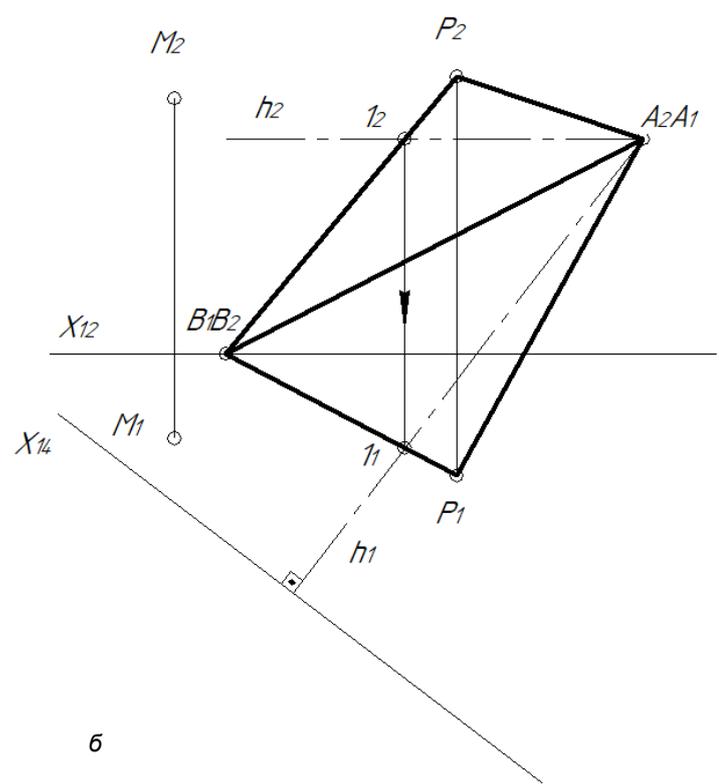
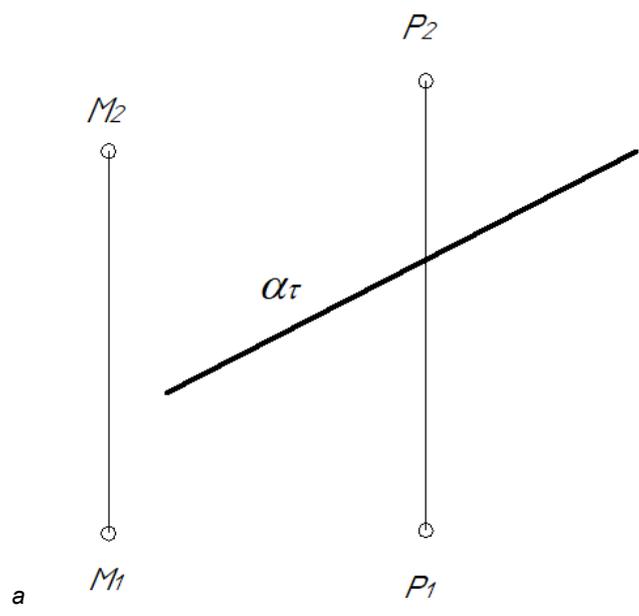


Рис. 6.7 (начало)

Задача 6.7. Постройте точку N симметрично точке R относительно плоскости общего положения.

Решение.

Построим точку N , симметричную точке R , относительно заданной плоскости общего положения $\beta(a \parallel b)$ (рис. 6.8, а).

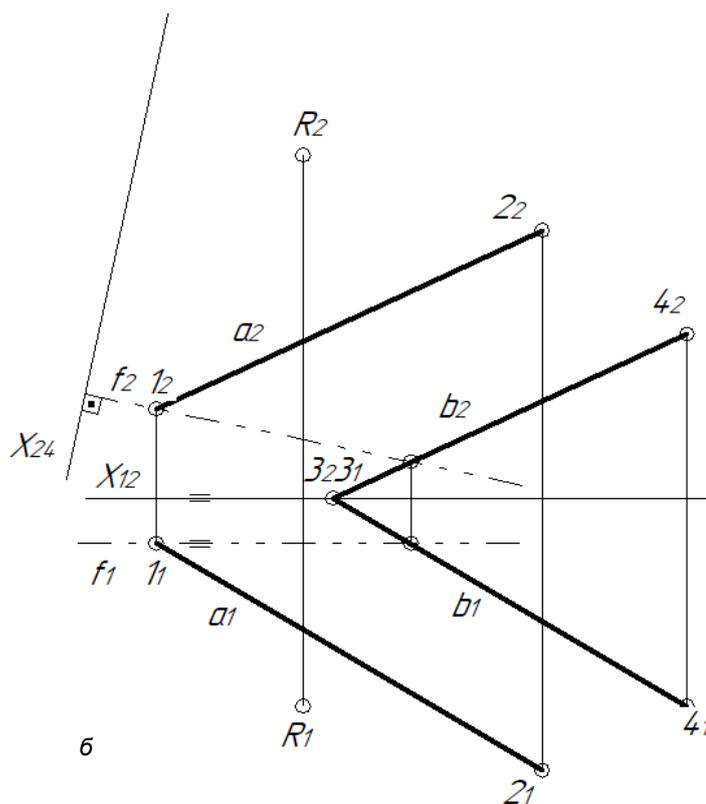
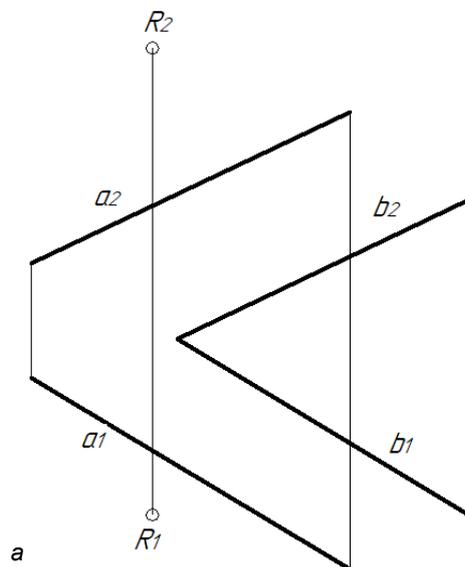


Рис. 6.8 (начало)

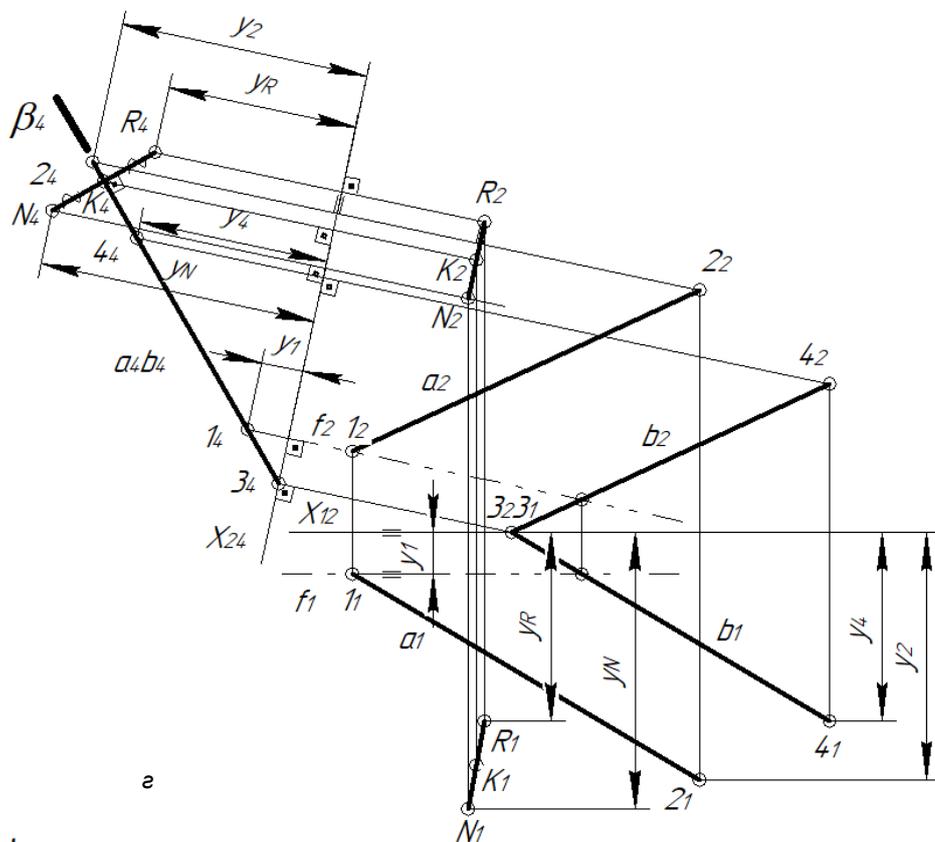
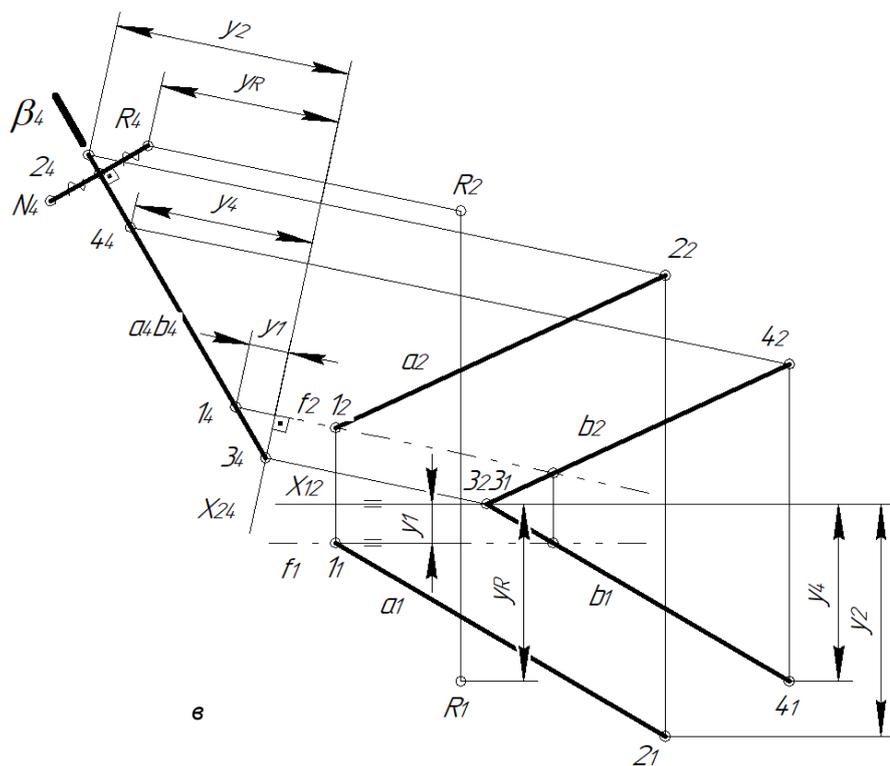


Рис. 6.8 (окончание)

1) Необходимо превратить плоскость $\beta(allb)$ общего положения в проецирующую плоскость, перпендикулярную новой плоскости проекций π_4 . В этот раз откажемся от горизонтальной плоскости проекций, т.е. перейдем от $X_{12} \xrightarrow[\pi_1]{\pi_2} X_{24} \xrightarrow[\pi_4]{\pi_2}$. Ограничим линии $allb$ отрезками 12 и 34. Ось проекций x_{12} проведем через горизонтальную проекцию точки с самой маленькой координатой y . Чтобы новая плоскость π_4 стала перпендикулярна плоскости $\beta(allb)$, необходимо вторую ось провести перпендикулярно фронтальной проекции фронтали f_2 . Построим любую фронталь, принадлежащую плоскости $\beta(allb)$. Проведем горизонтальную проекцию фронтали $f_1 \parallel x_{12}$ через любые две горизонтальные проекции точек, принадлежащих β . Фронтальную проекцию фронтали находим из условия принадлежности точек плоскости (рис. 6.8, б).

2) Построим линии ортогональной связи из всех фронтальных проекций точек на новую плоскость перпендикулярно оси x_{24} . На π_4 отложим старые координаты y для всех точек. Плоскость β спроецировалась на π_4 вырождено своим собирательным следом β_4 . Из проекции R_4 опустим перпендикуляр на собирательный след β_4 . Основание перпендикуляра – проекция точки $K-K_4$. Это кратчайшее расстояние от точки R до плоскости β : $|R_4K_4|=|RK|$. Проекция точки N , симметричной точке R , расположена на таком же расстоянии от K_4 : $|K_4N_4|=|R_4K_4|$ (рис. 6.8, в).

3) Вернем проекции точек KN на π_2 и π_1 . На π_2 проекция линии RN должна быть параллельна оси x_{24} (линии ортогональной связи $K_4K_2 \perp x_{24}$ и $N_4N_2 \perp x_{24}$). Построим линии ортогональной связи $K_2K_1 \perp x_{12}$ и $N_2N_1 \perp x_{12}$. На горизонтальной проекции откладываем координаты y_N и y_K , снятые на π_4 (рис. 6.8, в). Одноименные проекции соединим.

Задача 6.8. Определите точки встречи прямой и плоскости общего положения.

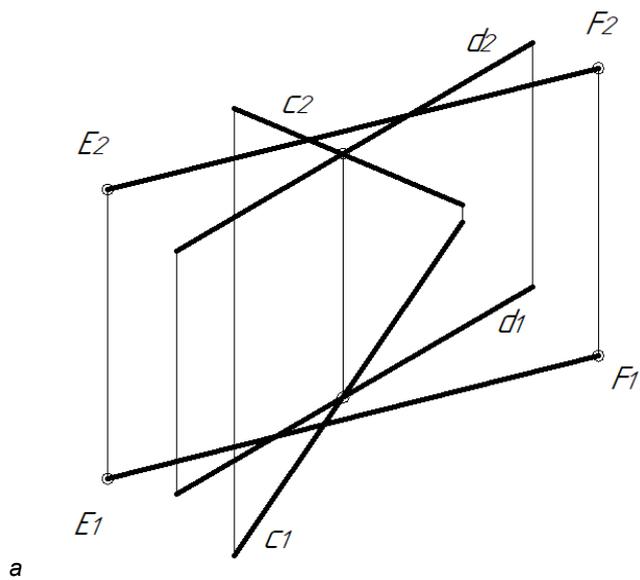
Решение.

Пусть плоскость γ задана пересекающимися линиями $\gamma(c \cap d)$. Найдем точку встречи заданной плоскости и отрезка прямой EF (рис. 6.9, а).

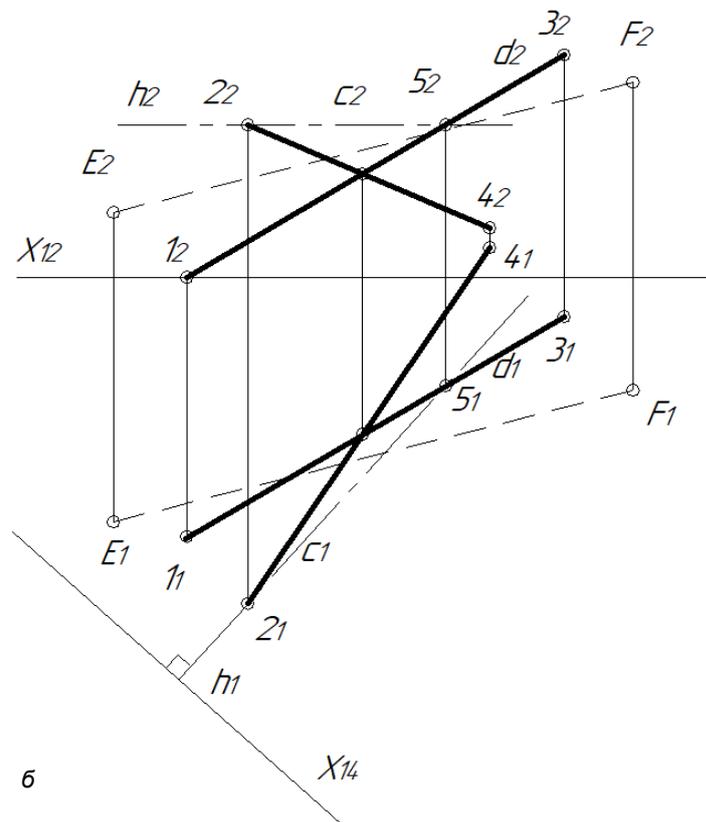
1) Превратим плоскость общего положения в проецирующую, т.е. перейдем от системы плоскостей проекций $X_{12} \xrightarrow[\pi_1]{\pi_2} X_{14} \xrightarrow[\pi_1]{\pi_4}$. Сначала ограничим линии $c \cap d$ точками 1234. Для удобства решения задачи проекции отрезка выполним штриховой линией. Первую ось проекций x_{12} проведем через точку с самой маленькой высотой по координате z , т.е. через фронтальную проекцию точки 1. Новую плоскость π_4 построим перпендикулярно γ . Заменяя π_2 на π_4 , вторую ось x_{14} возьмем перпендикулярной *горизонтальной проекции горизонтали* плоскости (рис. 6.9, б).

2) Измерив все координаты z точек, перенесем их на π_4 по линиям ортогональной связи. Получим собирательный след плоскости γ_4 . Проекция точки пересечения отрезка EF и собирательного следа есть проекция точки встречи отрезка и плоскости на π_4-K_4 (рис. 6.9, в). На π_4 линия EF видна вся.

3) Вернем проекцию точки K на π_1 и π_2 по линиям ортогональной связи из условия принадлежности $K \in EF$ (рис. 6.9, в). Определим видимость отрезка исходя из взгляда наблюдателя на π_1 по линиям ортогональной связи с индексом 14 (т.е. перпендикулярно оси x_{14}). E_4K_4 расположено до собирательного следа, следовательно, эта часть отрезка EF видна на π_1 . Выполним ее сплошной основной линией. Взгляд наблюдателя на плоскость проекций π_2 будет параллельным оси x_{14} , в сторону π_2 , где до собирательного следа располагается F_4K_4 . На фронтальной плоскости проекций вычертим F_2K_2 основной линией. Задача решена.

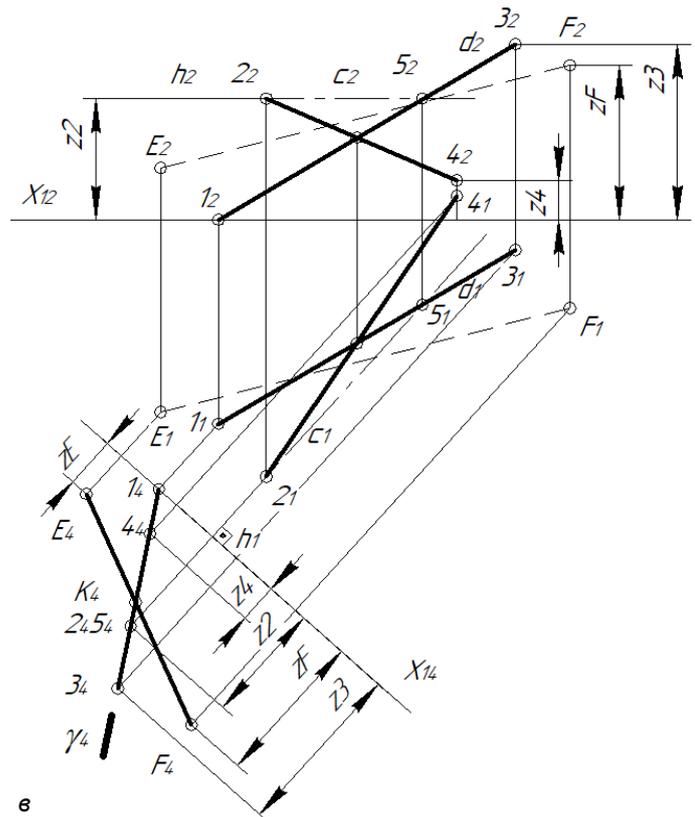


a

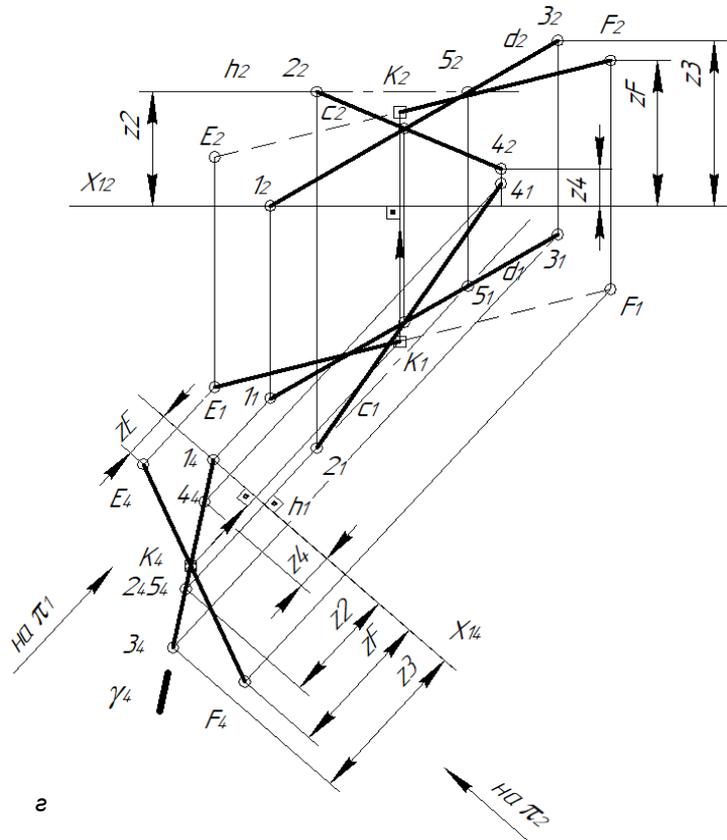


b

Рис. 6.9 (начало)



б



в

Рис. 6.9 (окончание)

Задача 6.9. Определите натуральную величину плоской фигуры.

Найдем истинную величину плоскости $\delta(ABC)$ (рис. 6.10, а). При решении этой задачи следует выполнить две замены: сначала превратить плоскость $\delta(ABC)$ в проецирующую на π_4 , а затем – в плоскость уровня по отношению к π_5 .

Решение.

1) Откажемся от горизонтальной плоскости проекций π_1 в пользу π_4 , т.е. осуществим замену $X_{12} \frac{\pi_2}{\pi_1} \Rightarrow X_{24} \frac{\pi_2}{\pi_4}$. Проведем x_{12} в удобном для нас месте (рис. 6.10, б). x_{24} построим перпендикулярно фронтальной проекции фронтали плоскости f_2 .

2) Построив новые линии ортогональной связи с π_2 на π_4 , отложим старые координаты у всех точек. Получим собирательный след плоскости δ_4 (рис. 6.10, в).

Выполним вторую замену: $X_{24} \frac{\pi_2}{\pi_4} \Rightarrow X_{45} \frac{\pi_5}{\pi_4}$. Ось x_{45} проведем параллельно собирательному следу δ_4 . Перенесем с π_2 координаты: *, ** и *** на π_5 по новым линиям ортогональной связи, перпендикулярным оси x_{45} . Получим истинную величину треугольника ABC (рис. 6.10, г).

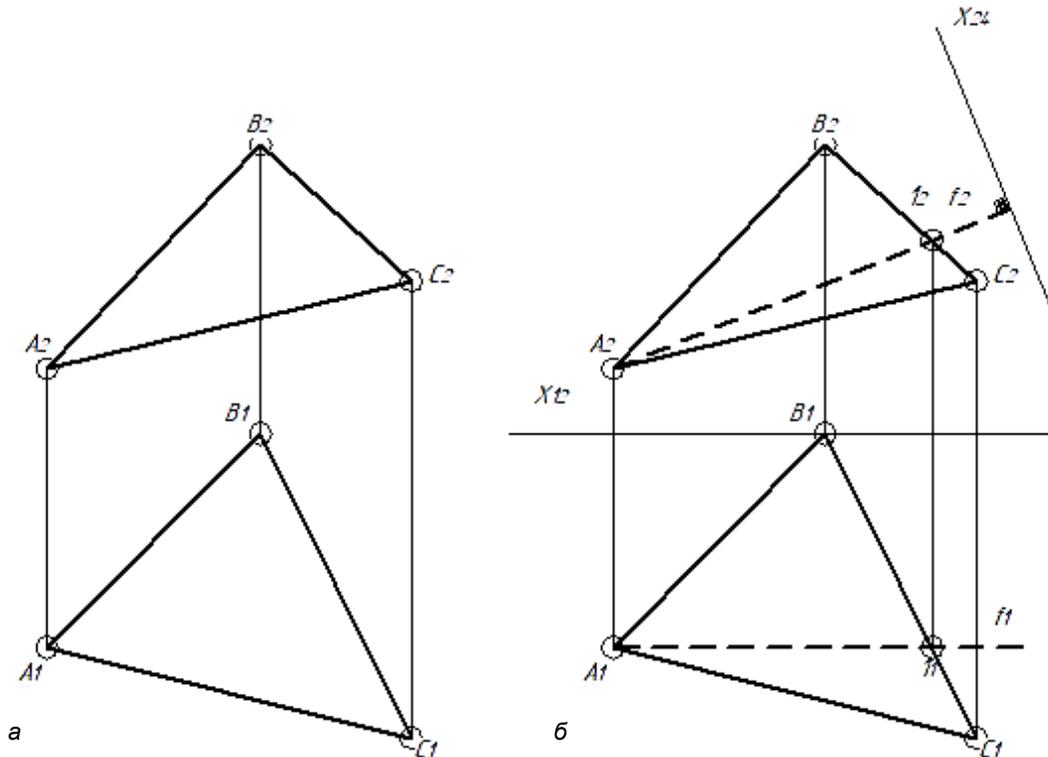


Рис. 6.10 (начало)

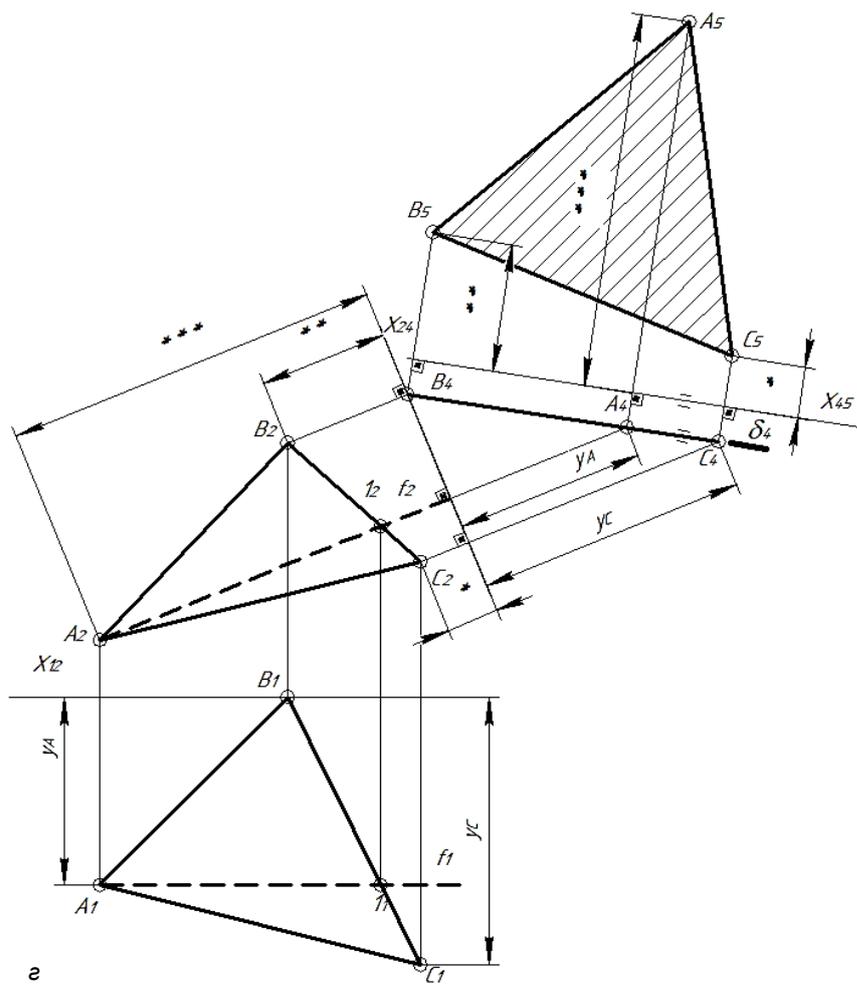
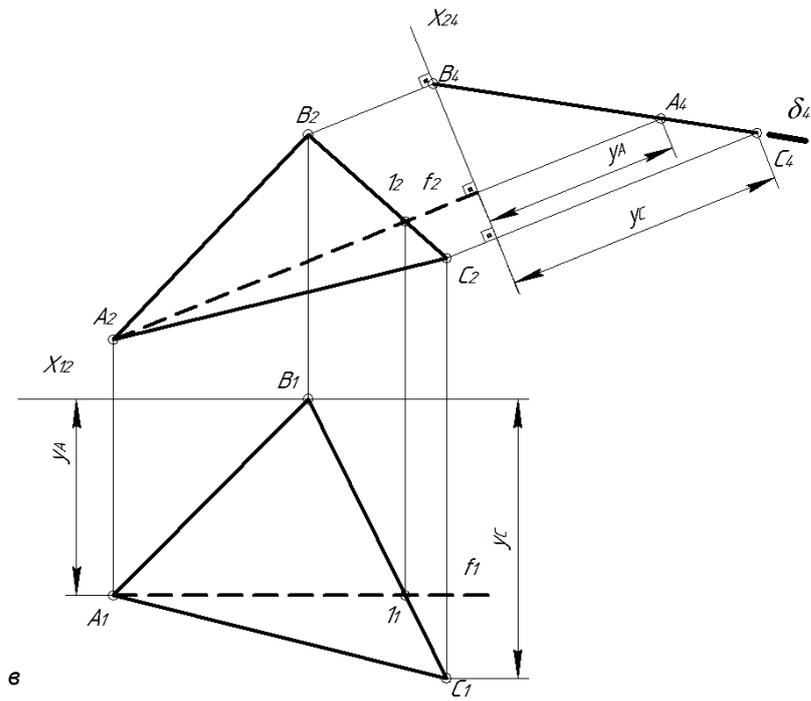


Рис. 6.10 (окончание)

6.2. Метод плоскопараллельного перемещения

Данный метод заключается в том, что изменение взаимного положения проецируемой фигуры и плоскостей проекций выполняется перемещением геометрической фигуры в новое положение так, что траектории перемещения точек фигуры располагаются в параллельных плоскостях.

В зависимости от положения плоскостей перемещения точек фигуры различают три способа:

1. Параллельного перемещения (переноса).
2. Вращения вокруг осей параллельных плоскостям проекций – вращение вокруг горизонтали или фронтали плоскости
3. Вращения вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций.

Рассмотрим более подробно первые два способа.

6.2.1. Способ параллельного перемещения (переноса)

При параллельном переносе размер геометрической фигуры относительно плоскости проекций меняет свое положение, но не меняет своего размера, т.е. остается конгруэнтной проекции фигуры в ее исходном положении (рис. 6.11).

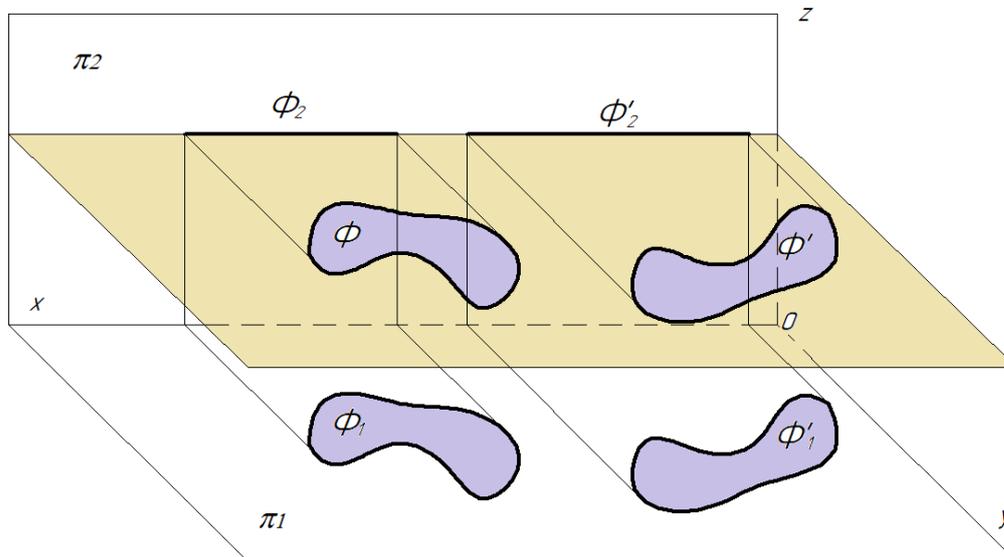


Рис. 6.11

На рисунке показано, что *размер горизонтальной проекции неизменен, а на фронтальной проекции неизменна высота точек фигуры.*

Снова получаем два алгоритма решения задач: для прямой и для плоскости.

Алгоритм решения задач для прямой

Этот алгоритм решает следующие задачи:

- определение расстояния от точки M до прямой общего положения l (задача 6.10);
- построение N , симметричной точке R , относительно прямой общего положения t (задача 6.11);
- определение расстояния между параллельными прямыми a и b (задача 6.12);
- определение расстояния между скрещивающимися линиями c и d (задача 6.13);
- определение натуральной величины двухгранного угла между двумя плоскостями $\alpha(ABC)$ и $\beta(BCD)$ (задача 6.14).

Все эти задачи сводят к следующему решению: первым шагом превращают выбранную линию общего положения в линию уровня (горизонтальную или фронтальную). Вторым шагом превращают линию уровня в проецирующую прямую (перпендикулярную фронтальной или горизонтальной плоскости проекций). И последний шаг возвращает результат решения к исходным условиям.

Задача 6.10. Определите расстояния от точки M до прямой общего положения l (рис. 6.12, а).

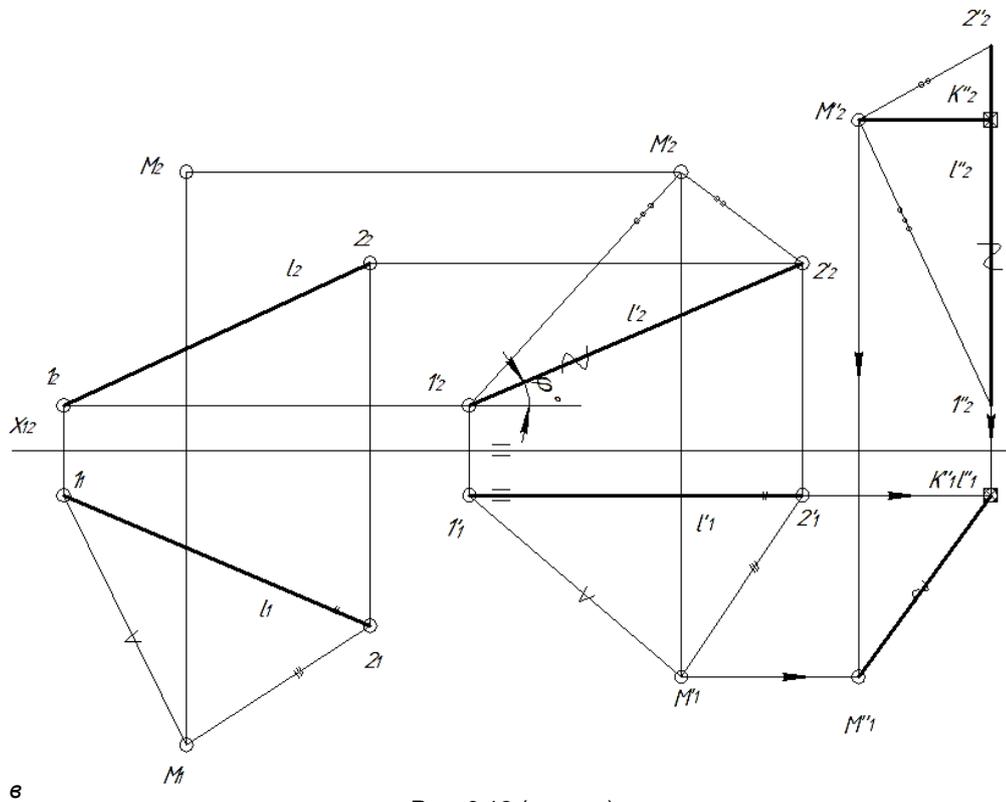
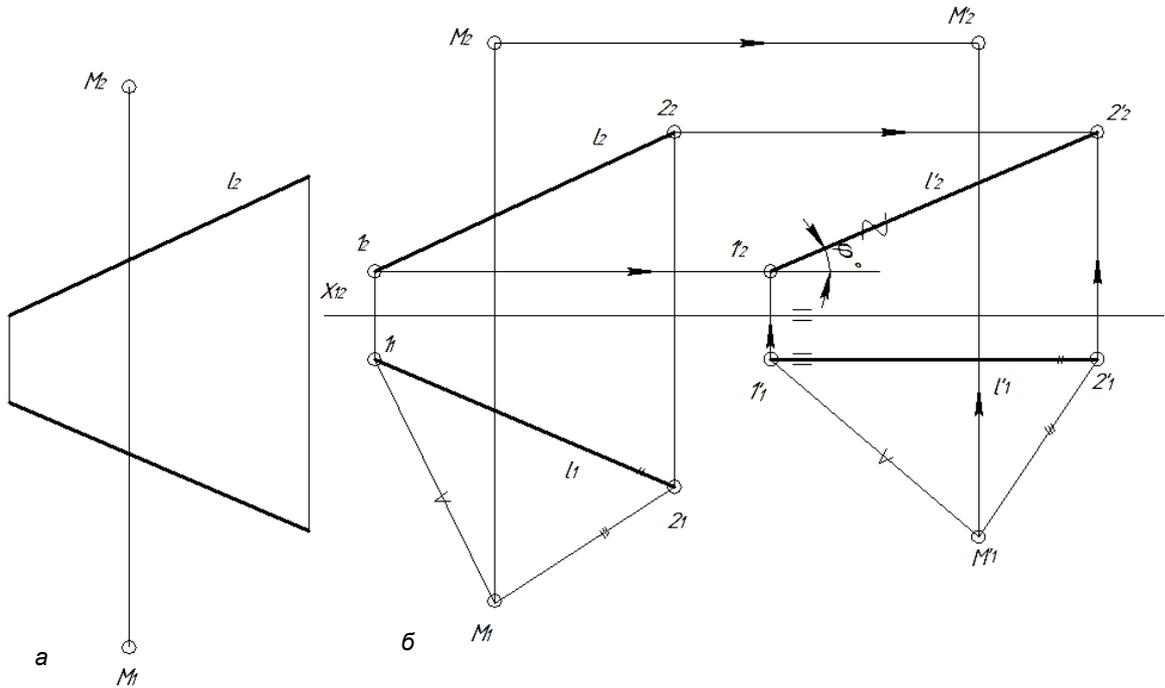


Рис. 6.12 (начало)

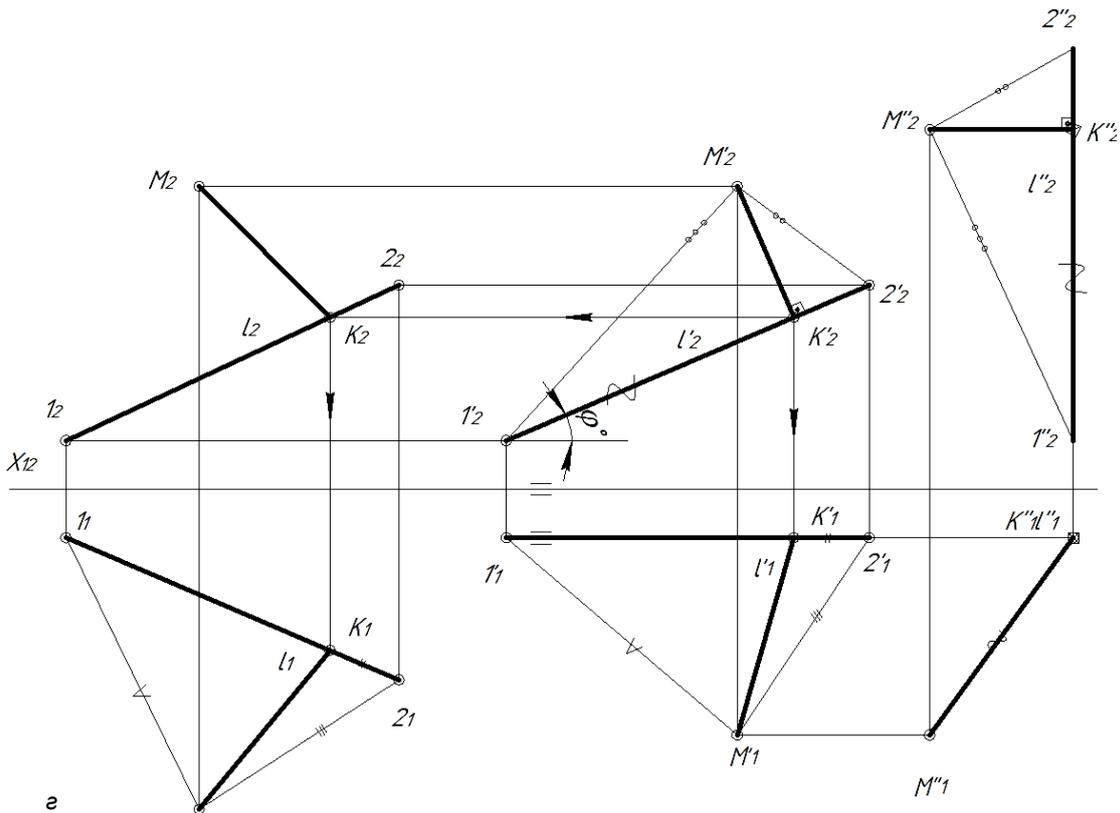


Рис. 6.12 (окончание)

Решение.

1) Проведем ось x_{12} в любом удобном месте. Ограничим линию l отрезком 12 . Превратим линию l в линию фронтального уровня, т.е. $l' \parallel \pi_2$: $1_1 2_1 M_1 \cong 1' 2' M'_1$ (рис. 6.12, б). Координаты z точек $1, 2$ и M останутся неизменными. Фронтальная проекция отрезка 12 равна его истинной величине: $|12| = |1'2'2'|$. Истинная величина угла наклона линии l к горизонтальной плоскости проекций составляет φ° .

2) Превратим линию l' в горизонтально-проецирующую прямую $l'' \perp \pi_1$. Новые фронтальные проекции всех точек расположим в любом удобном месте, не изменяя расстояния между ними $1'' 2'' M'' \cong 1' 2' M'_1$ и $1'' 2'' \perp x_{12}$. На π_1 останутся неизменными вторые координаты y для всех проекций точек (рис. 6.12, в). Проекция прямой l'' получается вырожденной. Расстояние от точки M до прямой l спроецируется в истинную величину $|M'' K''| = |MK|$.

3) Вернем это расстояние на исходные условия: $M'' K'' \perp l''$ и $K'' \in l''$. Точка K'' делит отрезок $1'' 2''$ в каком-то соотношении. В этом соотношении поделит K'_2 проекцию l'_2 . (если l' линия фронтального уровня, то $K'_2 M'_2 \perp l'_2$). По линии связи $K'_2 K'_1 \perp x_{12}$ определим $K'_1 \in l'_1$. По координате z определим положение $K_2 \in l_2$. И по линии ортогональной связи найдем горизонтальную проекцию точки $K - K_1$. Одноименные проекции кратчайшего расстояния от точки до прямой соединим основной линией (рис. 6.12, а).

Задача 6.11. Построить точку N , симметричной точке M , относительно прямой общего положения l (рис. 6.13, а).

Решение.

Решим задачу за одно перемещение, так как достаточно превратить линию общего положения в линию горизонтального уровня $t' \parallel \pi_1$. Концы линии t ограничим отрезком 12 . Вычертим ось x_{12} в любом удобном для нас месте. Новая фронтальная проекция точки и линии должна быть равна по величине старой фронтальной проекции: $1' 2' 2' R' \cong 1_2 2_2 R_2$, а проекция $t'_2 (1' 2' 2') \parallel x_{12}$ (рис. 6.13, б). Расположена новая фронтальная проекция может быть произвольно. На горизонтальной проекции координаты y всех проекций точек остаются неизменными. Горизонтальная

проекция отрезка $1'2'$ равна его истинной величине: $|12| = |1'2'|$. Здесь же мы видим истинную величину угла наклона линии t к фронтальной плоскости проекций $\pi_2 - \psi^\circ$.

По теореме о проецировании прямого угла $R'1K'1 \perp t'1$, $|R'1K'1| = |K'1N'1|$, вернем проекции точек K и N на исходный чертеж (рис. 6.13, в). На всех проекциях проекции $|RK| = |KN|$.

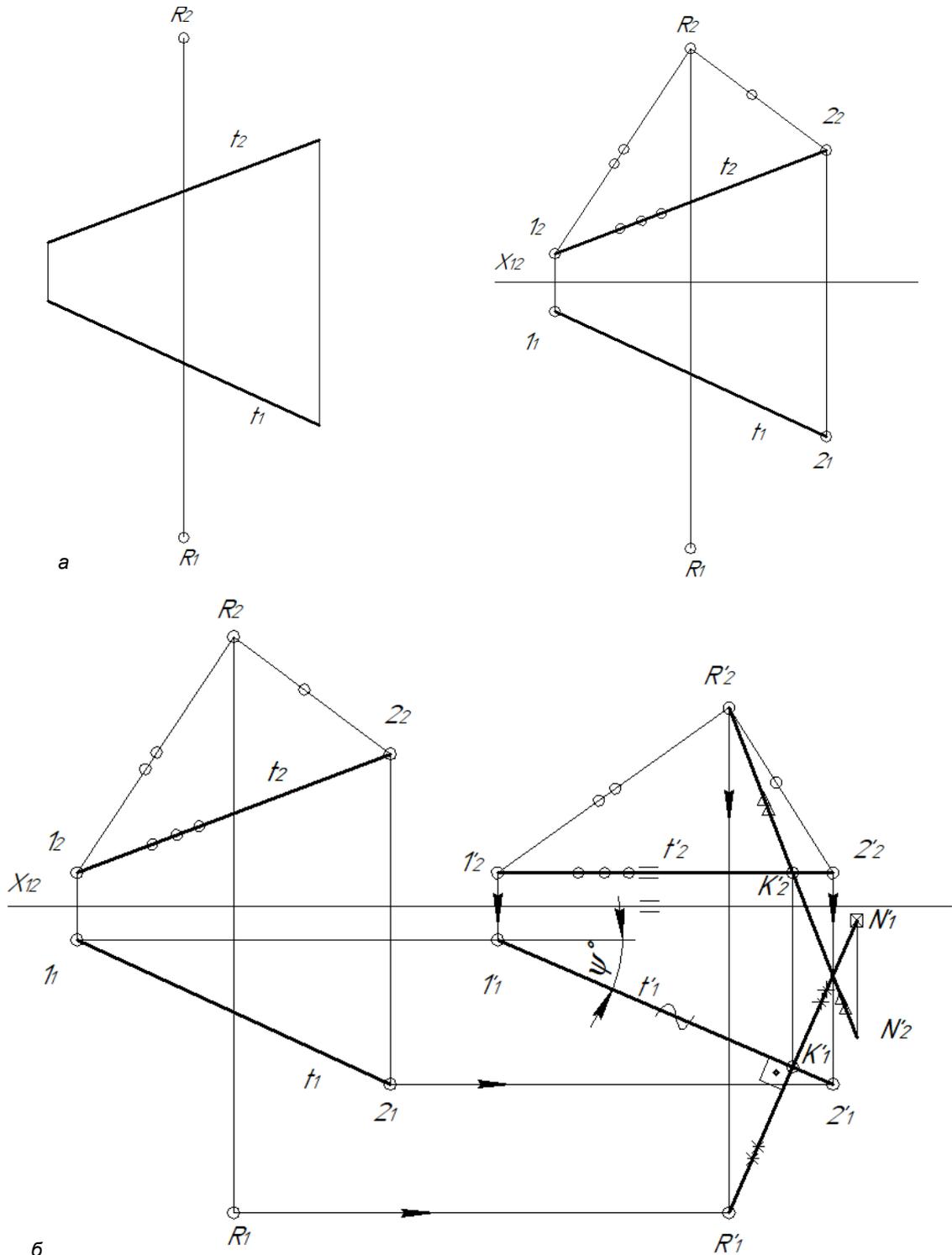


Рис. 6.13 (начало)

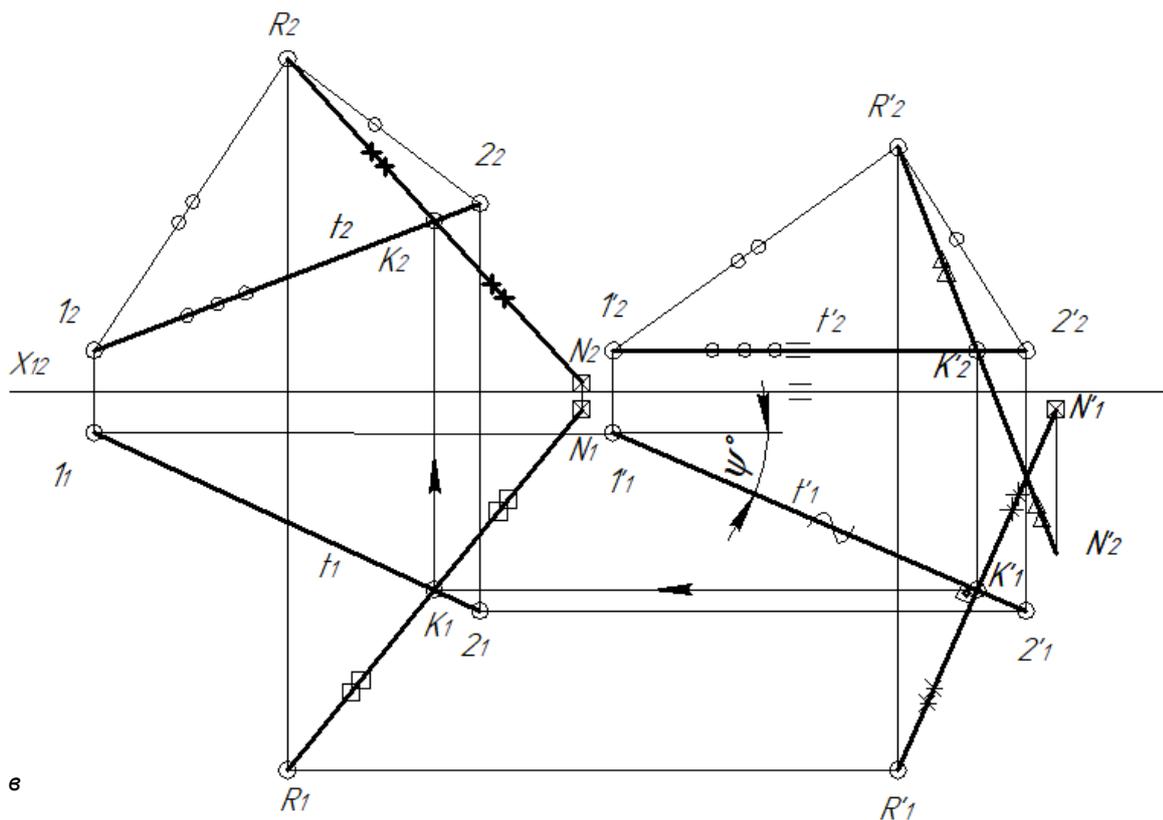


Рис. 6.13 (окончание)

Задача 6.12. Определите расстояния между параллельными прямыми a и b .

На рис. 6.14, а заданы параллельные прямые $a \parallel b$. Определим между ними расстояние за два перемещения.

Решение.

Ограничим линии a и b отрезками 12 и 34 . Проведем ось x_{12} в любом удобном для нас месте. Превратим линии a' и b' во фронтальные прямые. Новая горизонтальная проекция $1'2'13'14' \cong 1_12_13_14_1$. Расположим ее в любом удобном для нас месте так, чтобы: $1'2'1'$ и $3'14'1$ стали параллельны оси x_{12} . При этом у новых фронтальных проекций точек останутся старые координаты z (рис. 6.14, б). Линии a' и b' на фронтальной проекции видны в натуральную величину.

Поставим линии a'' и b'' в положение горизонтально-проецирующих прямых. Для этого построим еще одну фронтальную проекцию $1''2''23''24''2 \cong 1'2'23'24'2$. Расположим ее произвольно, но $1''2''2$ и $3''24''2$ должны быть перпендикулярны оси x_{12} . При этом на горизонтальной проекции координаты y останутся старыми. a'' и b'' на горизонтальную проекцию проецируются вырожденными. Это и есть кратчайшее расстояние между параллельными прямыми. Обозначим его через конкретный отрезок $K''N''$, $|K''_1N''_1| = |K''N''|$ (рис. 6.14, в).

На фронтальной проекции первую точку возьмем в любом месте: $K''_2 \in a''_2$, так как линии проецирующие, то $K''_2N''_2 \perp b''_2$ и проекция $N''_2 \in b''_2$. Проекция точек K'' и N'' делят линии a'' и b'' в каком-то соотношении. Вернем их на предыдущие положения в том же самом соотношении (рис. 6.14, в). Покажем проекции этого расстояния на всех изображениях самостоятельно.

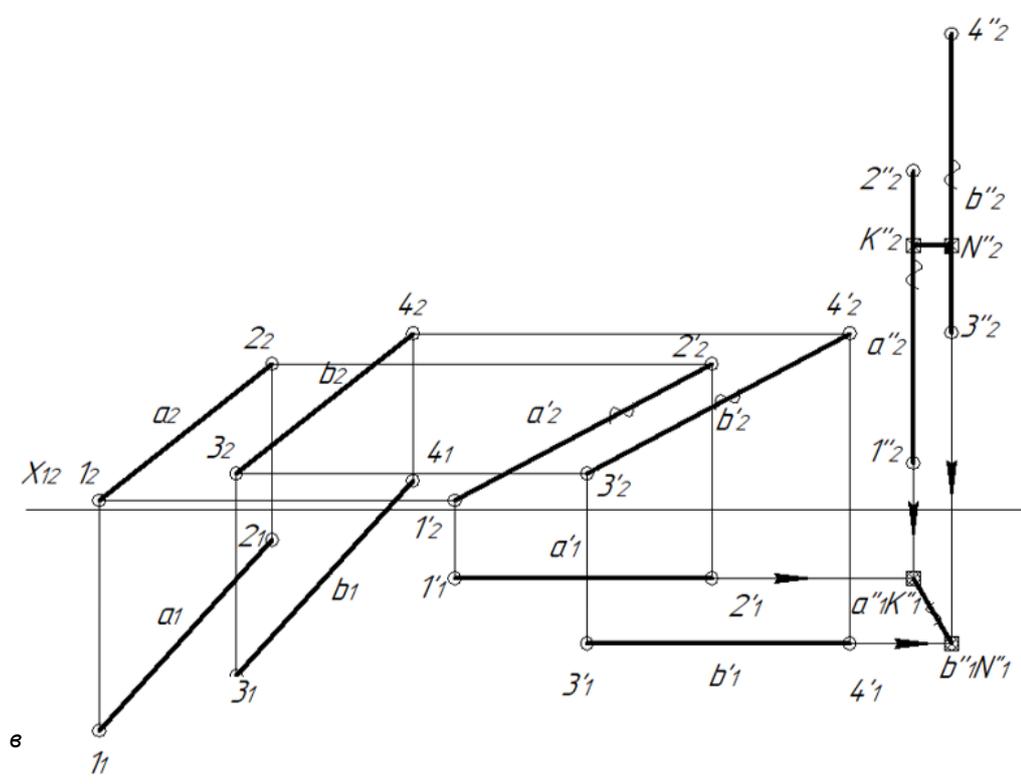
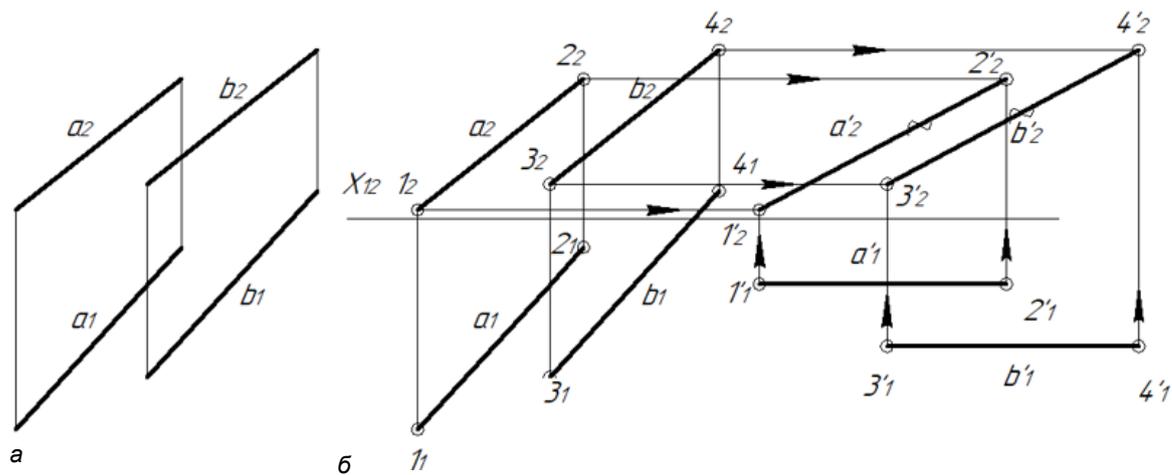


Рис. 6.14

Задача 6.13. Определите расстояние между скрещивающимися линиями s и d .

На рис. 6.15, а заданы скрещивающиеся линии s и d , определим между ними расстояние методом *параллельного переноса*. Задача решается за два перемещения.

Решение.

Ограничим линии s и d отрезками 12 и 34 . Проведем ось X_{12} .

Выбираем одну линию, которую превратим сначала в линию уровня, а затем в проецирующую прямую. Пусть такой линией будет s . Вторая линия d при всех перемещениях будет оставаться линией общего положения.

Переместим новую фронтальную проекцию в удобное место так, чтобы $1'2'2'3'2'4'2' \cong 1_22_23_24_2$, а новая фронтальная проекция линии $c'1'2'2'$ стала параллельна оси x_{12} . Линия c' заняла положение горизонтальной прямой. При таком перемещении у всех новых горизонтальных проекций точек останется старая координата y (рис. 6.15, б). Линия c' стала линией горизонтального уровня, на горизонтальную плоскость проекций она спроецировалась в истинную величину $|1'1'2'1'| = |121|$.

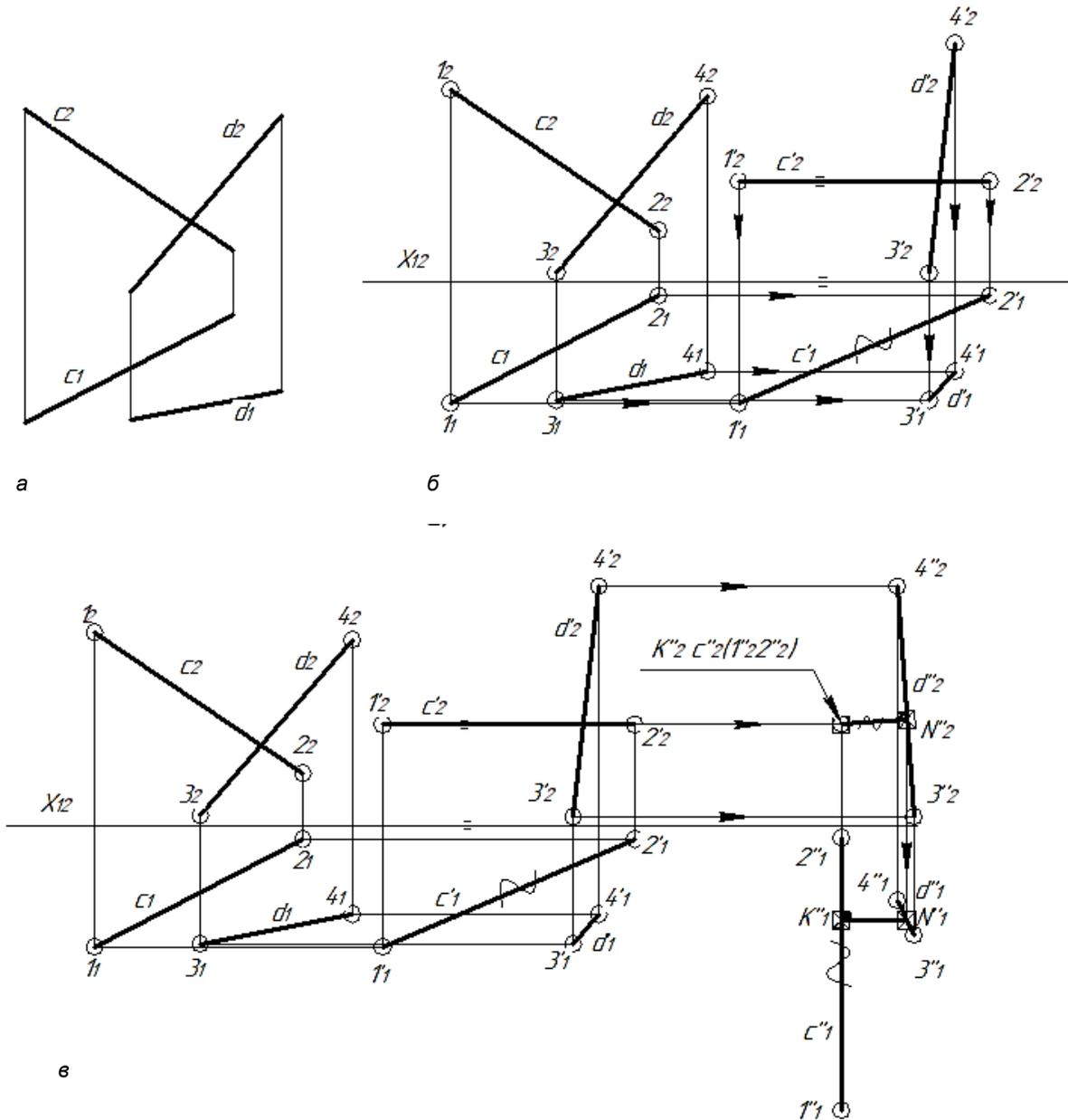


Рис. 6.15 (начало)

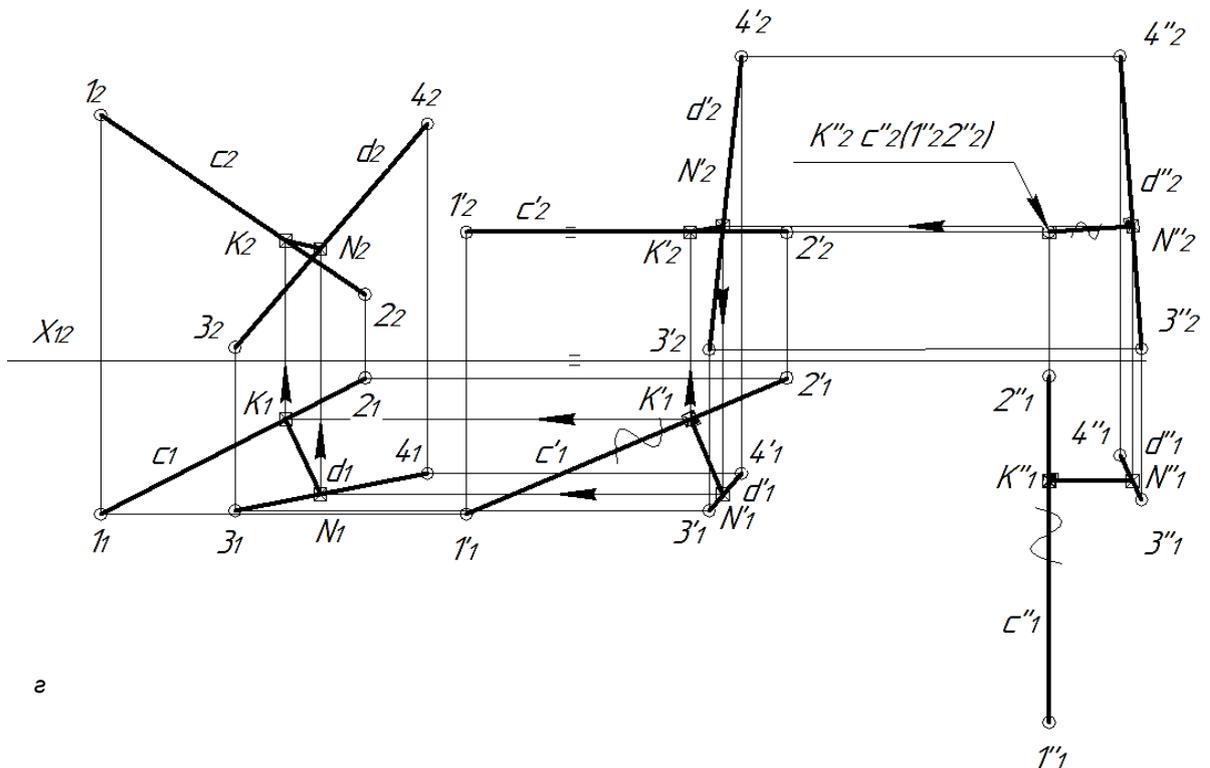


Рис. 6.15 (окончание)

Второе перемещение выполним на горизонтальной проекции: $1''_1, 2''_1, 3''_1, 4''_1 \in 1'_1, 2'_1, 3'_1, 4'_1$ (новая горизонтальная проекция линий c'' и d'' конгруэнтна старой горизонтальной проекции после первого перемещения), а $1''_1, 2''_1 \perp X_{12}$. Линия c'' стала фронтально-проецирующей прямой ($c'' \perp \pi_2$). На фронтальной проекции координаты z всех точек останутся неизменными (рис. 6.15, в). Кратчайшее расстояние между скрещивающимися линиями – это перпендикуляр, опущенный из вырожденной проекции c''_2 к d''_2 : $|K''_2N''_2| = |KM|$.

Вернем проекцию этого расстояния на исходный чертеж (рис. 6.15, а).

Задача 6.14. Определите натуральную величину двугранного угла между двумя плоскостями $\alpha(ABC)$ и $\beta(BCD)$.

В этой задаче даны две пересекающиеся плоскости, линией их пересечения является отрезок BC (рис. 6.16, а). Видимость элементов определим с помощью конкурирующих точек (рис. 6.16, б). Ось X_{12} построим в любом месте.

Решение.

Линию пересечения, отрезок BC , следует поставить сначала в положение линии уровня, а затем – в проецирующее.

Первым перемещением $B'C'$ поставим в положение линии фронтального уровня $B'C' \parallel \pi_2$. Размеры горизонтальной проекции $A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 \in A_1, B_1, C_1, D_1$, $B'_1, C'_1 \parallel X_{12}$. Координаты z всех точек $A'B'C'D'$ останутся неизменными. На фронтальной проекции отрезок $B'C'$ спроецировался в натуральную величину $|B'_2, C'_2| = |BC|$.

Теперь поставим $B''C'' \perp \pi_1$ в горизонтально-проецирующее положение. Новую фронтальную проекцию $A''_2, B''_2, C''_2, D''_2 \in A'_2, B'_2, C'_2, D'_2$ при $B''_2, C''_2 \perp X_{12}$, координаты y при таком перемещении у всех новых горизонтальных проекций точек останутся старыми (рис. 6.16, в). Плоскости спроецировались вырожденно, покажем величину двугранного угла μ° . Задача решена.

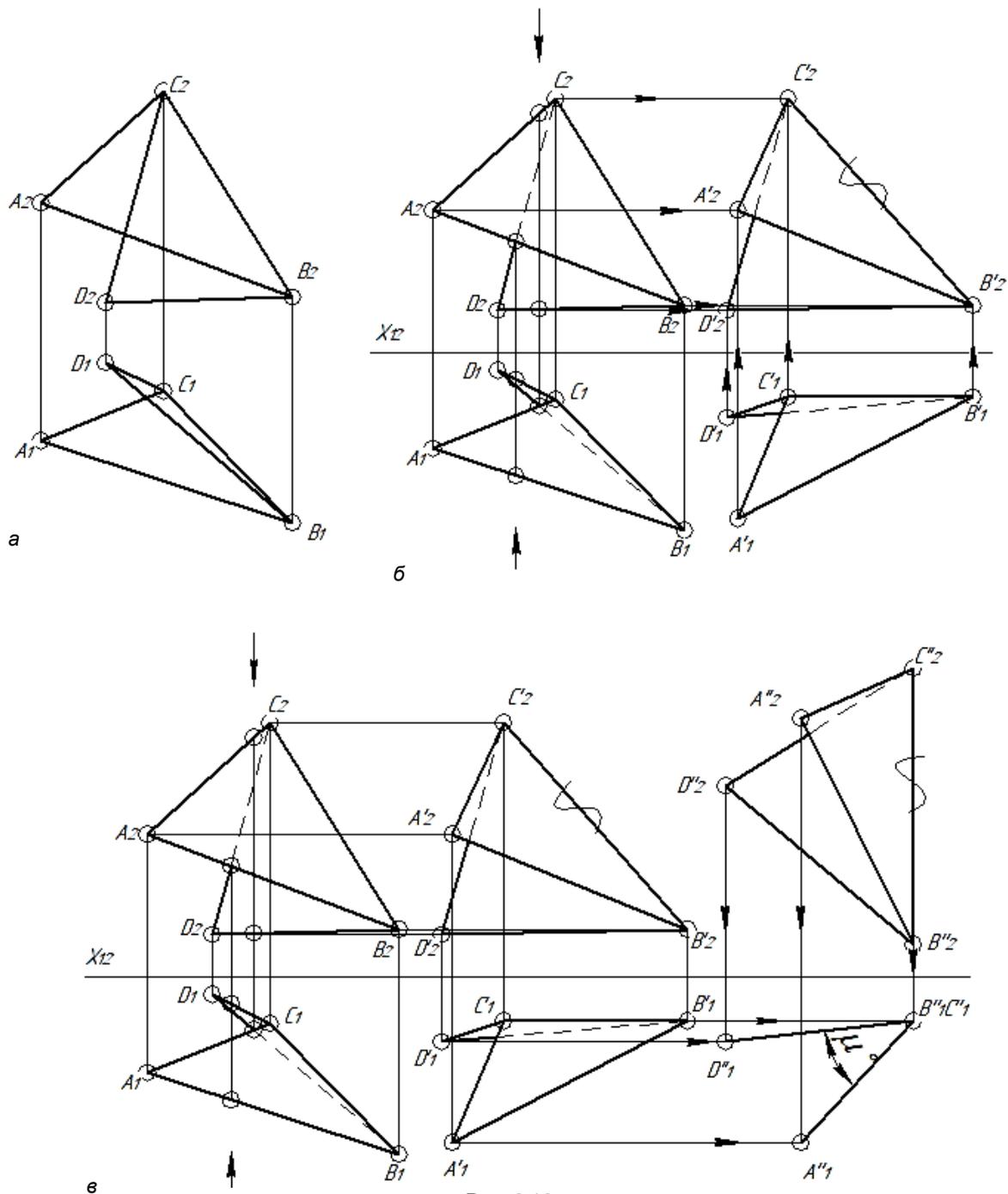


Рис. 6.16

Алгоритм решения задач для плоскости

Этот алгоритм решает следующие задачи:

- определение расстояния от точки M до плоскости α (задача 6.15);
- определение точки встречи отрезка NL и плоскости β (задача 6.16);
- определение натуральной величины плоской фигуры: $\gamma(a \cap b)$ (задача 6.17).

При решении такого типа задач необходимо плоскость превратить из плоскости общего положения сначала в проецирующую (задачи 6.15, 6.16), а затем в плоскость уровня (задача 6.17). Рассмотрим алгоритм на примерах решения заявленных задач.

Задача 6.15. Определите расстояния от точки M до плоскости $\alpha(allb)$.

Решение.

На рис. 6.17, а плоскость $\alpha(allb)$ занимает общее положение. Ограничим линии a и b отрезками 12 и 34. Проведем ось x_{12} в любом удобном для нас месте. Плоскость α' поставим во фронтально-проецирующее положение. Для этого необходимо, не меняя размеров горизонтальной проекции, поставить новую горизонтальную проекцию в положение, когда горизонтальная проекция горизонтали плоскости перпендикулярна оси x_{12} .

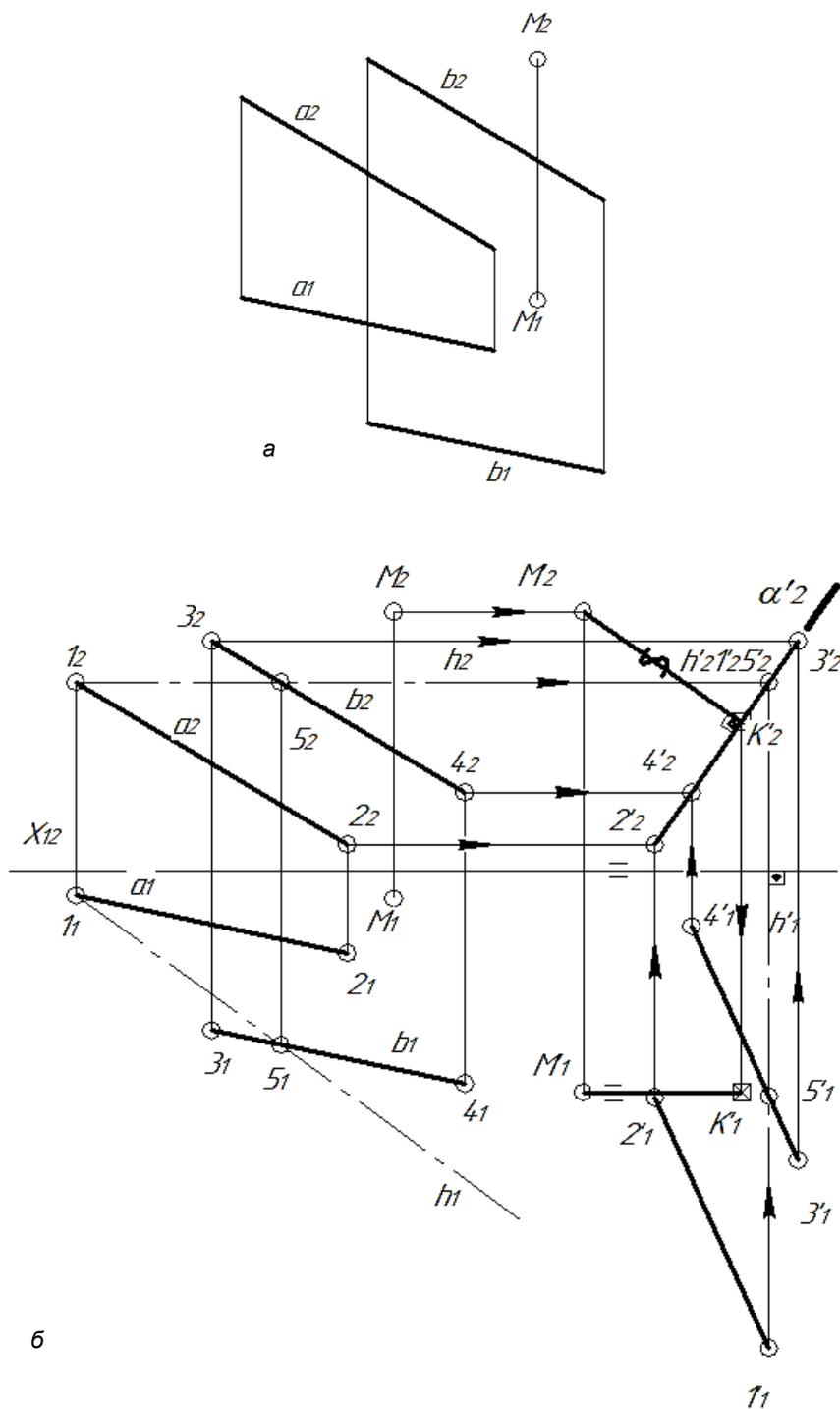


Рис. 6.17 (начало)

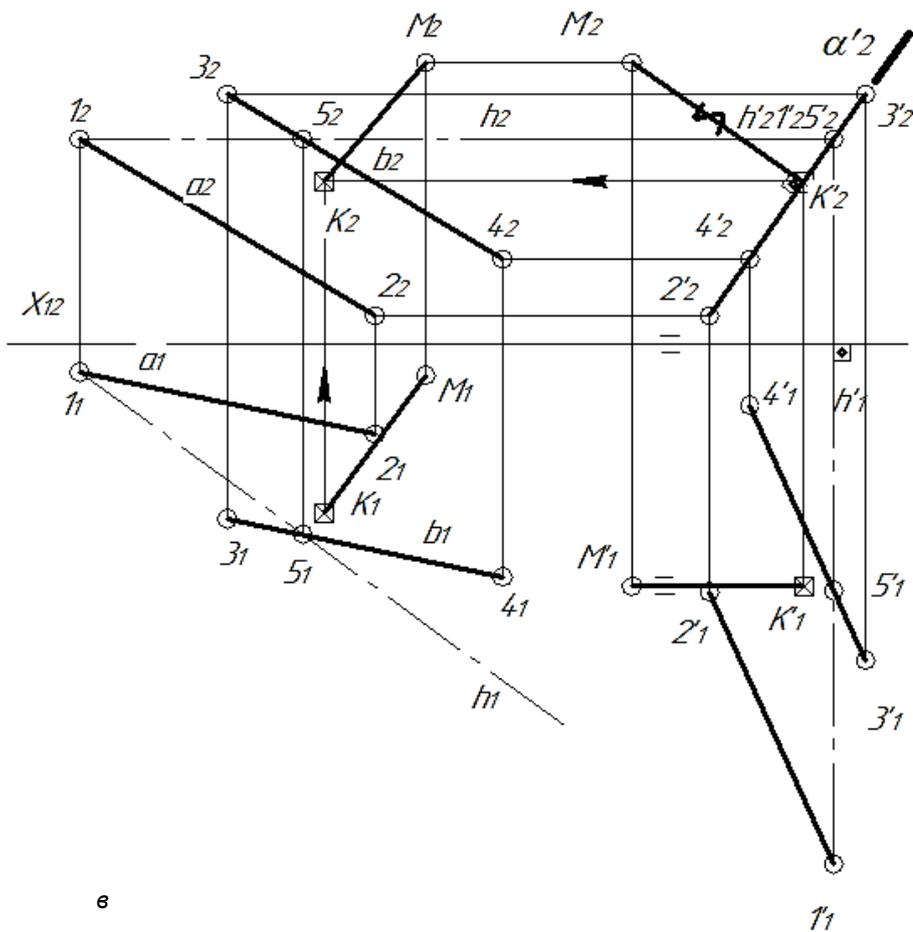


Рис. 6.17 (окончание)

На исходном чертеже строим фронтальную проекцию горизонтали через любые две точки с одинаковой высотой h_2 . По линиям ортогональной связи находим горизонтальную проекцию горизонтали h_1 .

Новая фронтальная проекция плоскости представляет собой собирательный след α'_2 (рис. 6.17, б). Расстояние от точки до плоскости на фронтальной проекции – это перпендикуляр, опущенный из M'_2 к собирательному следу $M'_2K'_2 \perp \alpha'_2$. Отрезок проецируется в истинную величину $|M'_2K'_2| = |MKI|$, а точка $K \in \alpha$, на горизонтальной проекции $M'_1K'_1 \parallel x_{12}$.

Вернем проекции точки K на исходный чертеж из условия конгруэнтности горизонтальных проекций до и после перемещения. На фронтальной проекции K_2 найдем по линии ортогональной связи и неизменности координаты z после перемещения и в исходном положении (рис. 6.17, в).

Задача 6.16. Определите точки встречи отрезка NL и плоскости $\beta(P; \beta_\tau)$.

Решение.

На рис. 6.18, а задана плоскость общего положения $\beta(P; \beta_\tau)$ и отрезок NL , найдем точку их пересечения и определим видимость отрезка. Перезаддим плоскость $\beta(P; A; B)$, проведем ось x_{12} . Превратим нашу плоскость общего положения в горизонтально-проецирующую. Для этого построим в плоскости фронталь: горизонтальную проекцию фронтали $f_1 \parallel x_{12}$ (проведем через любые две проекции с одинаковой координатой y), фронтальную проекцию фронтали f_2 построим по линиям ортогональной связи.

Не меняя размеров, выстроим новую фронтальную проекцию так, чтобы $f'_2 \perp X_{12}$. На горизонтальной проекции координаты y остаются старыми, плоскость β' стала горизонтально-проецирующей (на горизонтальной проекции выродилась в собирательный след β'_1).

Точку встречи найдем на пересечении собирательного следа и новой горизонтальной проекции отрезка: $\beta'_1 \cap N'_1 L'_1 = K'_1$ (рис. 6.18, б). Так как точка K принадлежит отрезку, вернем ее к исходному условию.

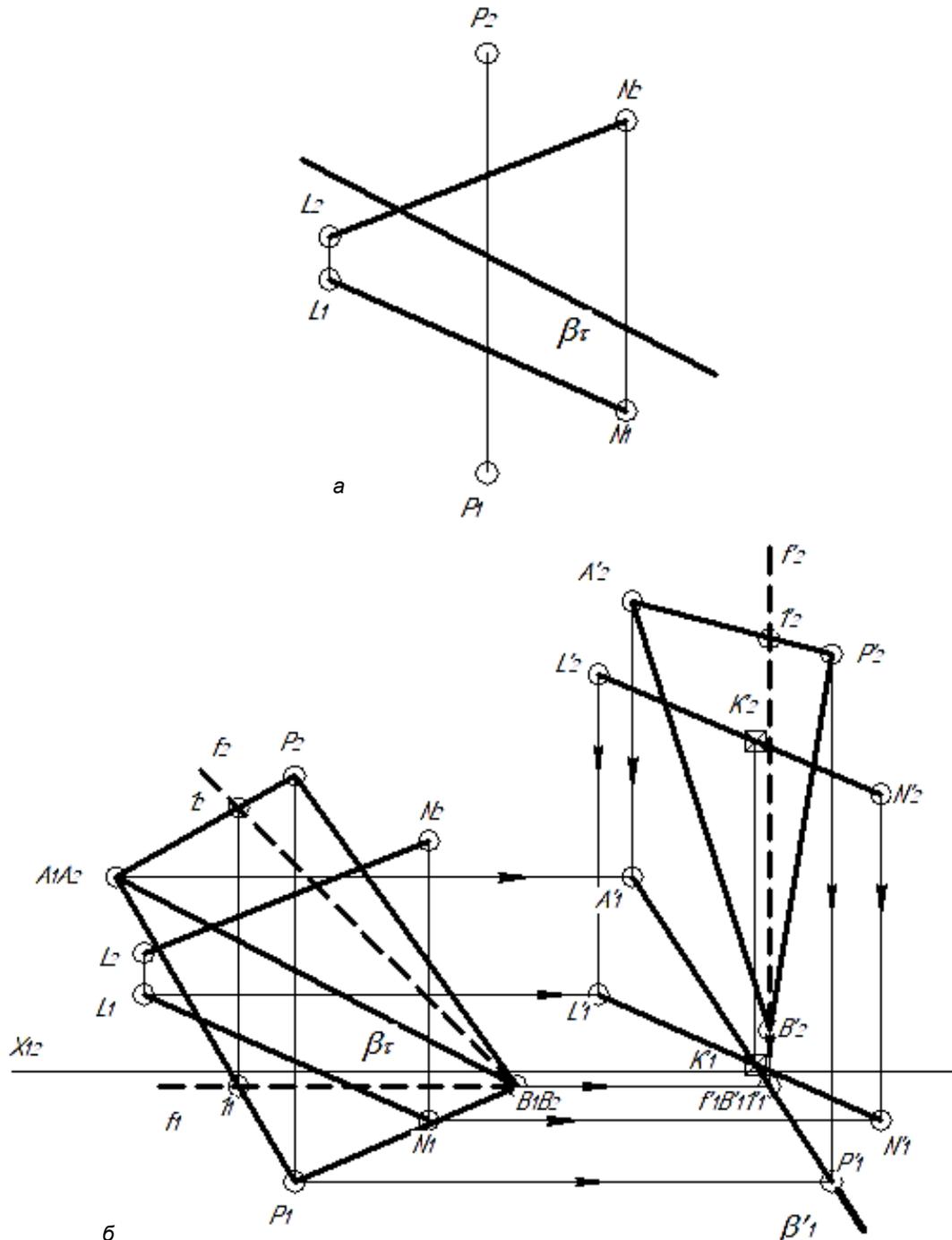


Рис. 6.18 (начало)

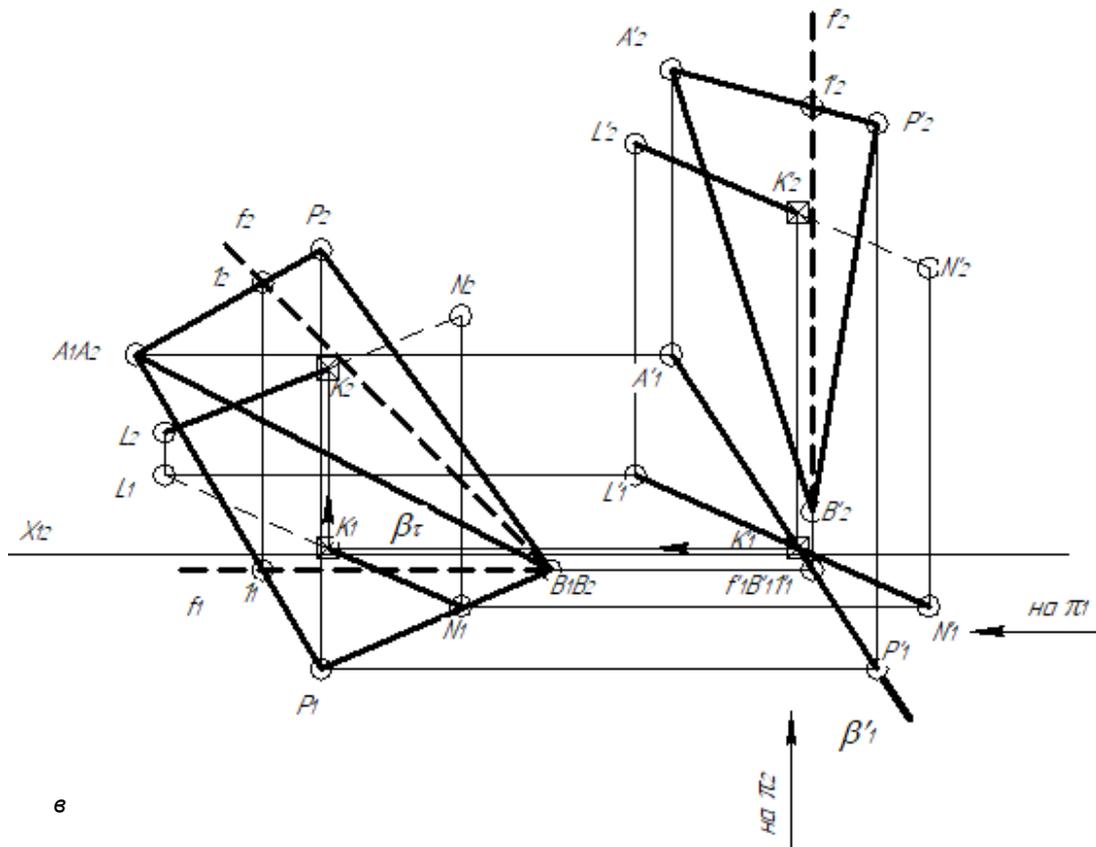


Рис. 6.18 (окончание)

Оба конца отрезка видимы там, где собирательный след. Видимость в других положениях отрезка определим с помощью направлений взгляда наблюдателя (рис. 6.18, в). Так как в исходном задании плоскость была задана не фигурой, то части отрезка видимы или невидимы до точки K .

Задача 6.17. Определите натуральную величину плоской фигуры.

Решение.

Решим задачу на определение натуральной величины угла при точке пересечения двух прямых в плоскости $\gamma(a \cap b)$ (рис. 6.19, а). Плоскость γ занимает общее положение, переместим ее сначала в положение фронтально-проецирующей, а затем в плоскость горизонтального уровня.

Ограничим плоскость тремя точками $\gamma(ABC)$, проведем ось x_{12} . Чтобы переместить плоскость общего положения в плоскость фронтально-проецирующую, нужно новую горизонтальную проекцию треугольника (конгруэнтного исходному: $A'_1B'_1C'_1 \cong A_1B_1C_1$) поставить в положение, когда горизонтальная проекция горизонтали плоскости перпендикулярна оси x_{12} (рис. 6.19, б) по старым координатам z точек A , B и C получим новую фронтальную проекцию – собирательный след плоскости γ'_2 .

Далее новый собирательный след $\gamma''_2 \cong \gamma'_2$ расположим параллельно оси x_{12} и построим новую горизонтальную проекцию, используя неизменные координаты y . Треугольник спроецировался в истинную величину, покажем искомый угол ω° (рис. 6.19, в). Задача решена.

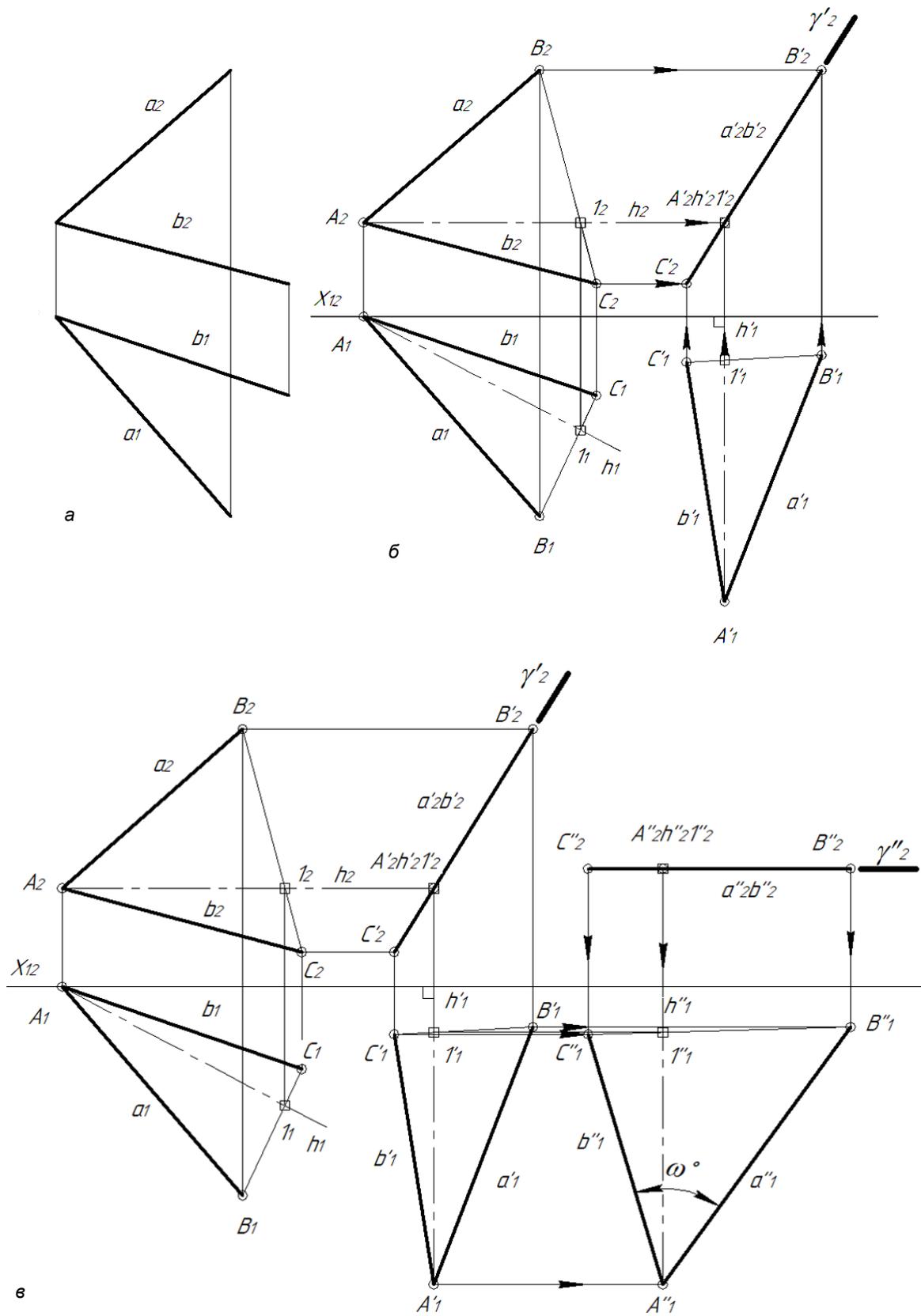


Рис. 6.19

6.2.2. Способ вращения вокруг линий уровня

Данный способ решает задачи на определение натуральной величины плоской фигуры. При использовании этого способа плоская фигура за один поворот вокруг оси параллельной плоскости проекций (*горизонтали* или *фронтали*) поворачивается из плоскости общего положения в плоскость уровня (горизонтального или фронтального). При этом все точки вращаются в плоскостях, перпендикулярных плоскостям проекций (горизонтально-проецирующих или фронтально-проецирующих) вокруг своих центров вращения по своим радиусам вращения. Как только радиусы вращения проецируются в истинную величину на плоскость, фигура становится плоскостью уровня и проецируется в натуральную величину (рис. 6.20).

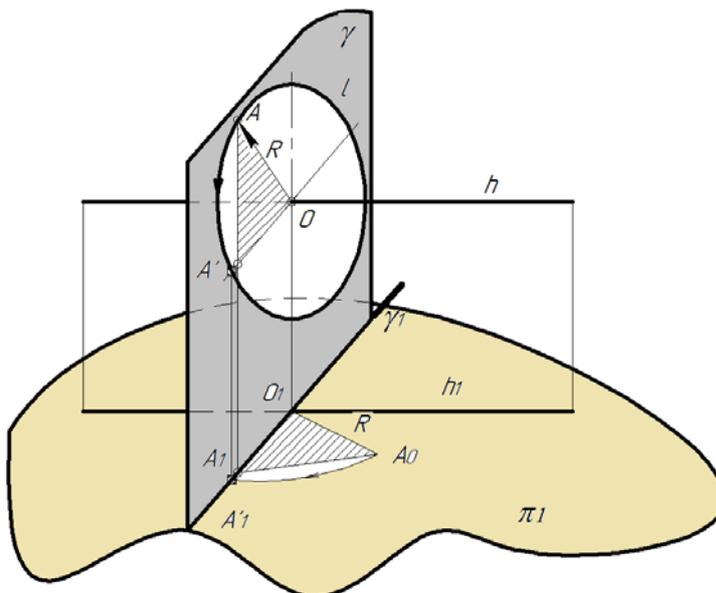


Рис. 6.20

Данный метод решает следующие задачи:

- определение натуральной величины угла между двумя пересекающимися линиями (задача 6.18);
- определение угла между скрещивающимися линиями (задача 6.19);
- определение натуральной величины плоской фигуры (задача 6.20);
- определение угла между прямой и заданной плоскостью (задача 6.21);
- определение натуральной величины двугранного угла между плоскостями, не пересекающимися явно (задача 6.22).

Задача 6.18. Определите угол между пересекающимися линиями e и k .

Решение.

Линии e и k пересекаются в точке A и образуют плоскость общего положения $\alpha(e \cap k = A)$ (рис. 6.21, а).

1) Построим в этой плоскости любую горизонталь $h \in \alpha$, проходящую через точки 12 . Фронтальная проекция горизонтали параллельна воображаемой оси x : $h_2 \parallel x$. Горизонтальную проекцию горизонтали построим по линиям связи из условия принадлежности 12 своим прямым: $1 \in e$, $2 \in k$.

2) Найдем точку O – центр вращения точки A вокруг горизонтали h . $A_1 O_1 \perp h_1$, точка $O \in h$. Точка A вращается вокруг своего центра O в горизонтально-проецирующей плоскости γ . Собирательный след $\gamma_1 \equiv A_1 O_1$ (рис. 6.21, б).

3) Определим истинную величину радиуса вращения точки A вокруг своего центра вращения точки O , принадлежащей горизонтали. Снимем разницу по координате z на фронтальной проекции между проекциями A_2 и O_2 : Δz . На горизонтальной проекции построим прямоугольный треугольник, один катет которого равен $A_1 O_1$, а второй – Δz . Дельту приложим к горизонтальной проекции точки A_1 , чтобы радиус вращения R_A повернуть вокруг центра вращения O_1 до совмещения с собирательным следом плоскости вращения $\gamma - \gamma_1$. Точки 12 после поворота остаются

на месте. Плоскость $\alpha'(e' \cap k' = A')$ после такого поворота стала параллельна горизонтальной плоскости проекций, угол между пересекающимися линиями λ° виден в натуральную величину. Покажем собирательный след плоскости $\alpha - \alpha_2$ после поворота. Новая фронтальная проекция A'_2 строится по линии ортогональной связи из нового положения точки A' на горизонтальной проекции и принадлежит собирательному следу α'_2 (рис. 6.21, в).

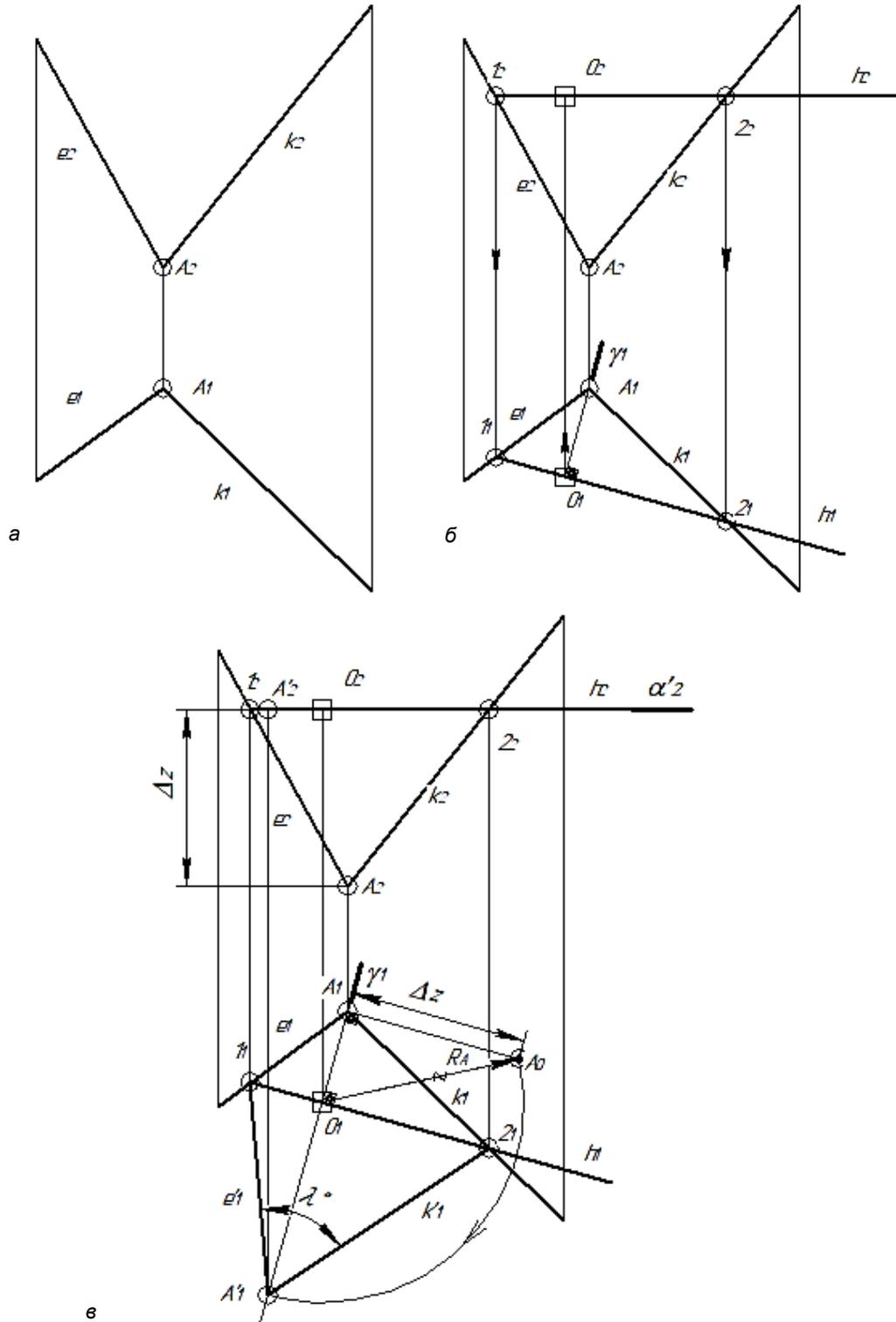


Рис. 6.21

Задача 6.19. Определите угол между скрещивающимися линиями s и d .

Теорема: Величина угла между двумя скрещивающимися линиями равна величине угла между пересекающимися линиями, параллельными данным скрещивающимся.

Решение.

Определим угол между заданными скрещивающимися линиями s и d (рис. 6.22, а).

Заменим на пересекающиеся: $k \cap s = E$, где $k \parallel d$, и получим плоскость общего положения $\beta (k \cap s = E)$ (рис. 6.22, б).

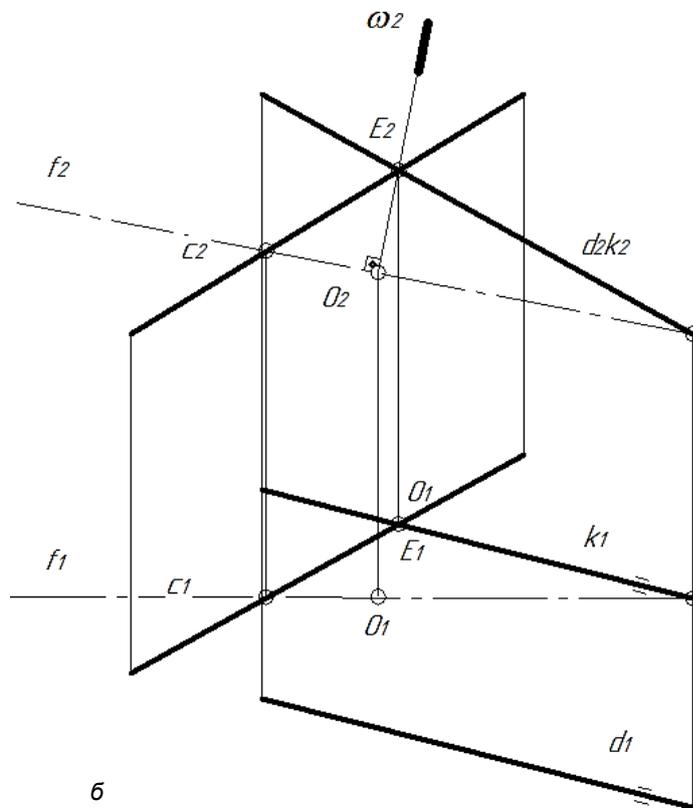
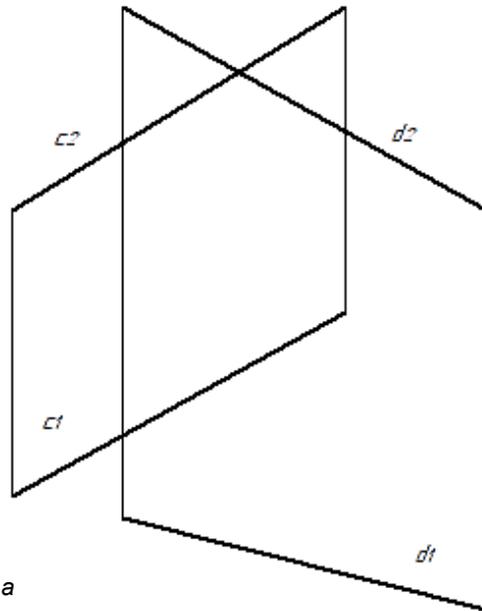


Рис. 6.22 (начало)

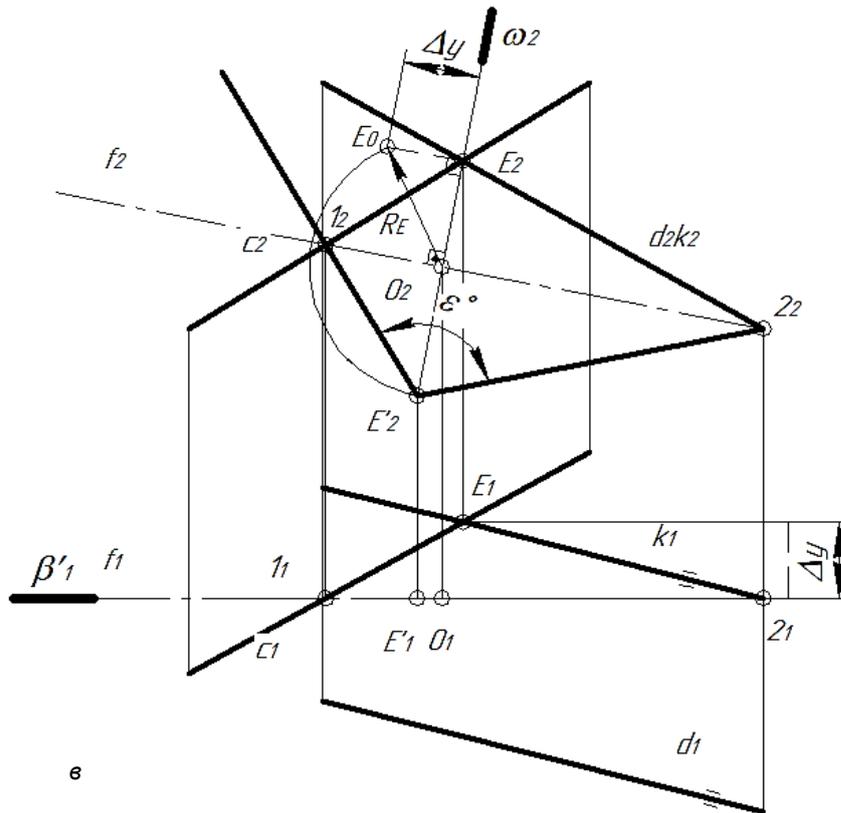


Рис. 6.22 (окончание)

Задачу решим методом вращения вокруг фронтали $f \in \beta$. Горизонтальную проекцию фронтали проводим через две любые точки с одинаковой координатой y (это проекции точек 12). Фронтальную проекцию находим по линиям ортогональной связи.

Найдем центр вращения точки E вокруг f , т.е. точку O : $E_2O_2 \perp f_2$. Точка $O \in f$, E_1 найдем по линии ортогональной связи. Плоскость вращения точки E вокруг своего центра вращения точки O фронтально-проецирующая плоскость ω . Собирательный след плоскости $\omega_2 \equiv E_2O_2$. Определим натуральную величину радиуса вращения R_E через Δy , повернем R_E до совпадения с ω_2 (рис. 6.22, в). Покажем угол между линиями $k' \cap c' - \varepsilon^\circ$, он равен углу между скрещивающимися линиями s и d .

Задача 6.20. Определите натуральную величину плоской фигуры $ABCD$.

Решение.

На рис. 6.23, а задана плоскость $ABCD$, вращением вокруг горизонтали определим ее истинную величину.

На горизонтальной проекции заданы все точки, а на фронтальной только три проекции. Любые три точки, не лежащие на одной прямой, образуют плоскость, следовательно, четвертая точка должна принадлежать этой плоскости. Достроим недостающую проекцию точки D , используя для этого линию $A1$. Далее построим горизонталь этой плоскости h (рис. 6.23, б).

Найдем центры вращения точек O_B , O_C и O_D , которые принадлежат горизонтали h : $B_1O_{B1} \perp h_1$; $C_1O_{C1} \perp h_1$; $D_1O_{D1} \perp h_1$. По линиям ортогональной связи найдем фронтальные проекции центров вращения точек. Покажем плоскости вращений: γ для точки B ; ω для точки C и δ для точки D . Это горизонтально-проецирующие плоскости, параллельные между собой. Их собирательные следы совпали с проекциями: $\gamma_1 \equiv B_1O_{B1}$; $\omega_1 \equiv B_1O_{C1}$ и $\delta_1 \equiv D_1O_{D1}$ (рис. 6.23, в).

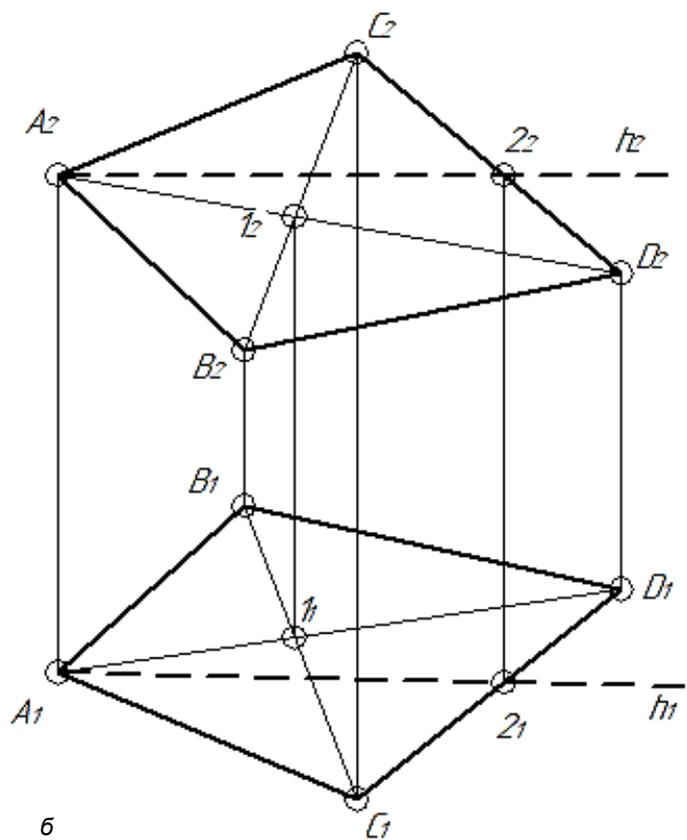
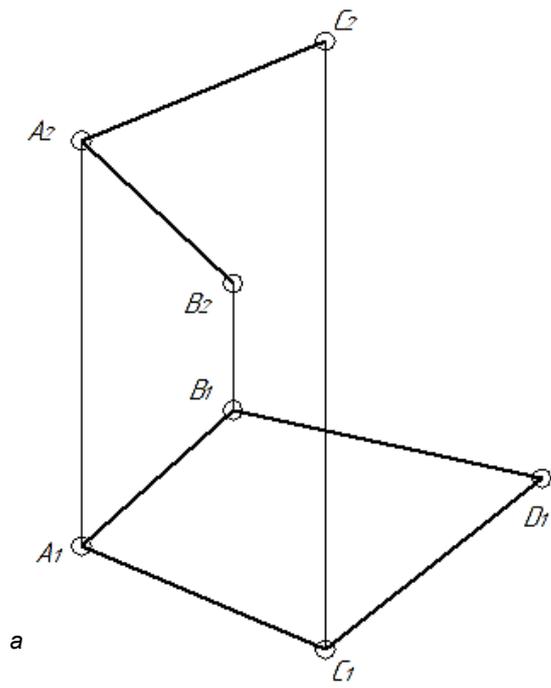


Рис. 6.23 (начало)

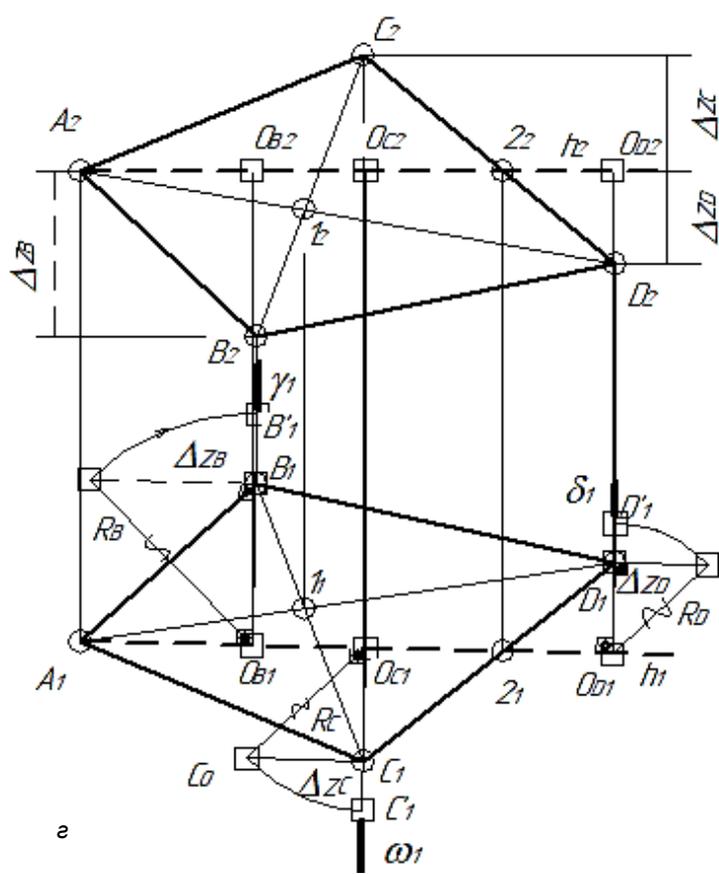
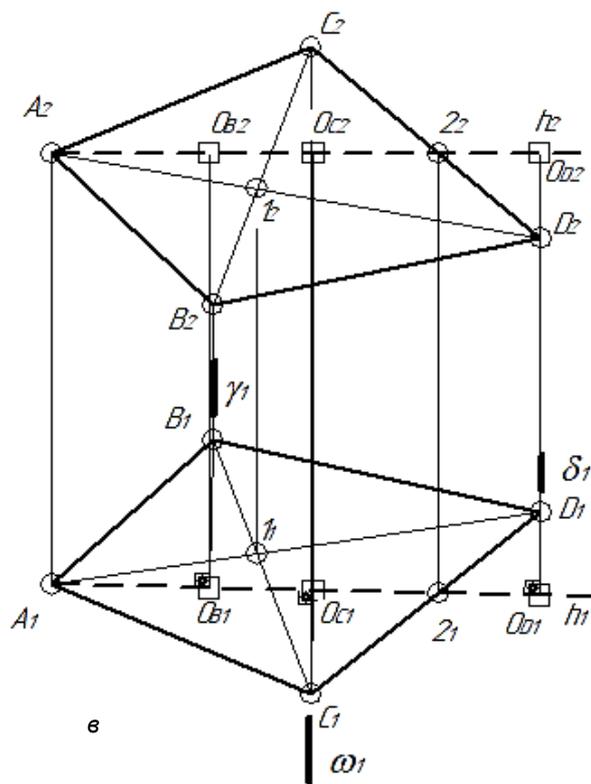


Рис. 6.23 (продолжение)

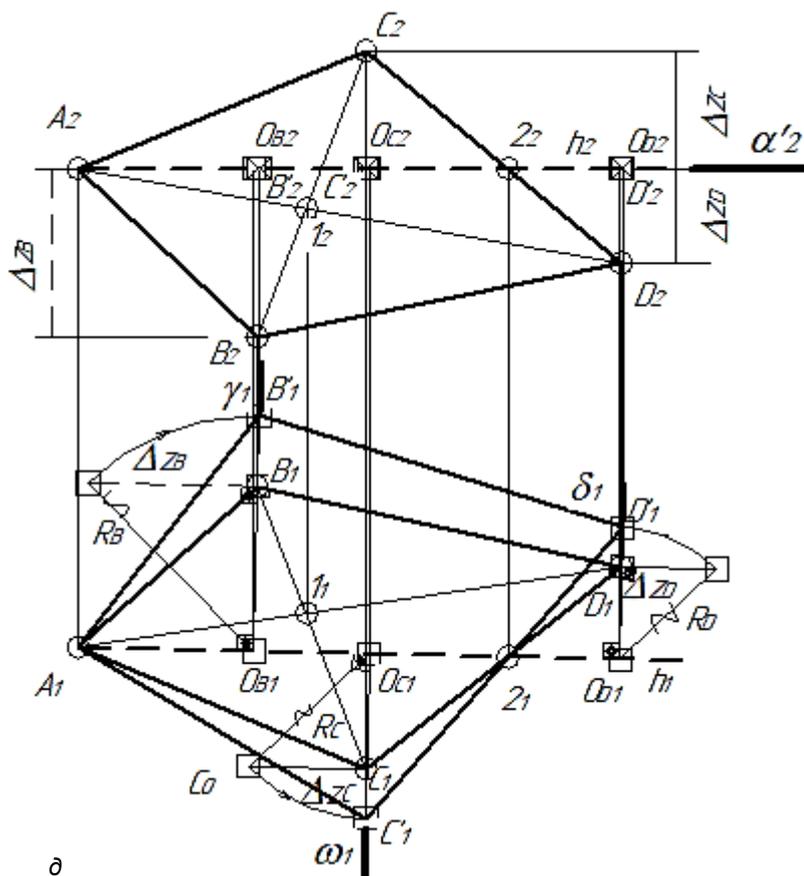


Рис. 6.23 (окончание)

Определим радиусы вращения точек: $R_B=|BO_{B1}|$; $R_C=|CO_{C1}|$ и $R_D=|DO_{D1}|$ методом прямоугольного треугольника, используя ΔZ_B ; ΔZ_C и ΔZ_D . Переместим радиусы вращения в свои плоскости вращения, получим новые горизонтальные положения точек $B'1$; $C'1$ и $D'1$ (рис. 6.23, а).

Соединим полученные проекции. Получим новое горизонтальное положение фигуры. На фронтальной проекции все точки переместились на фронтальную проекцию горизонтали по линиям ортогональной связи. Исходная плоскость выродилась до собирательного следа α_2 (рис. 6.23, б).

Задача 6.21. Определите угол между прямой и заданной плоскостью.

Решение.

На рис. 6.24 показано решение этой задачи. Угол δ° находится между плоскостью α и прямой g . Задачу можно решить прямолинейно: найти точку встречи K прямой g и плоскости α , получить проекцию g_α и далее любым способом найти интересующий нас угол. Задача получается сложной. При решении ее способом вращения вокруг линии уровня видим, что из любой произвольной точки A линии g опустили t – перпендикуляр в сторону плоскости α . Получили плоскость γ . Угол ω° при точке A является острым углом в прямоугольном треугольнике AKL . Следовательно, $\delta^\circ=90^\circ-\omega^\circ$. Методом вращения вокруг фронтали плоскости γ найдем величину ω° и достроим этот угол до 90° . Это и будет интересующий нас угол δ° .

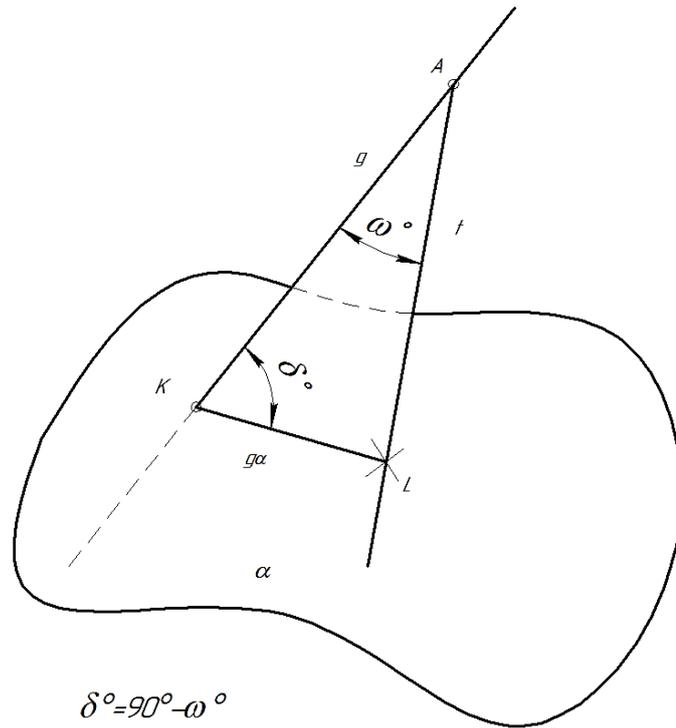


Рис. 6.24

Решим эту задачу на конкретном примере (рис. 6.25, а).

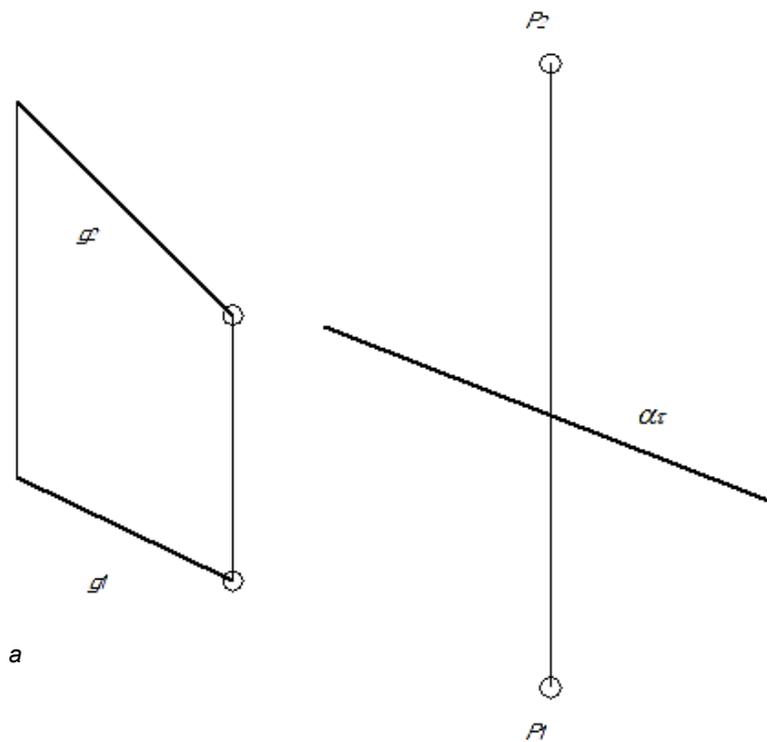


Рис. 6.25 (начало)

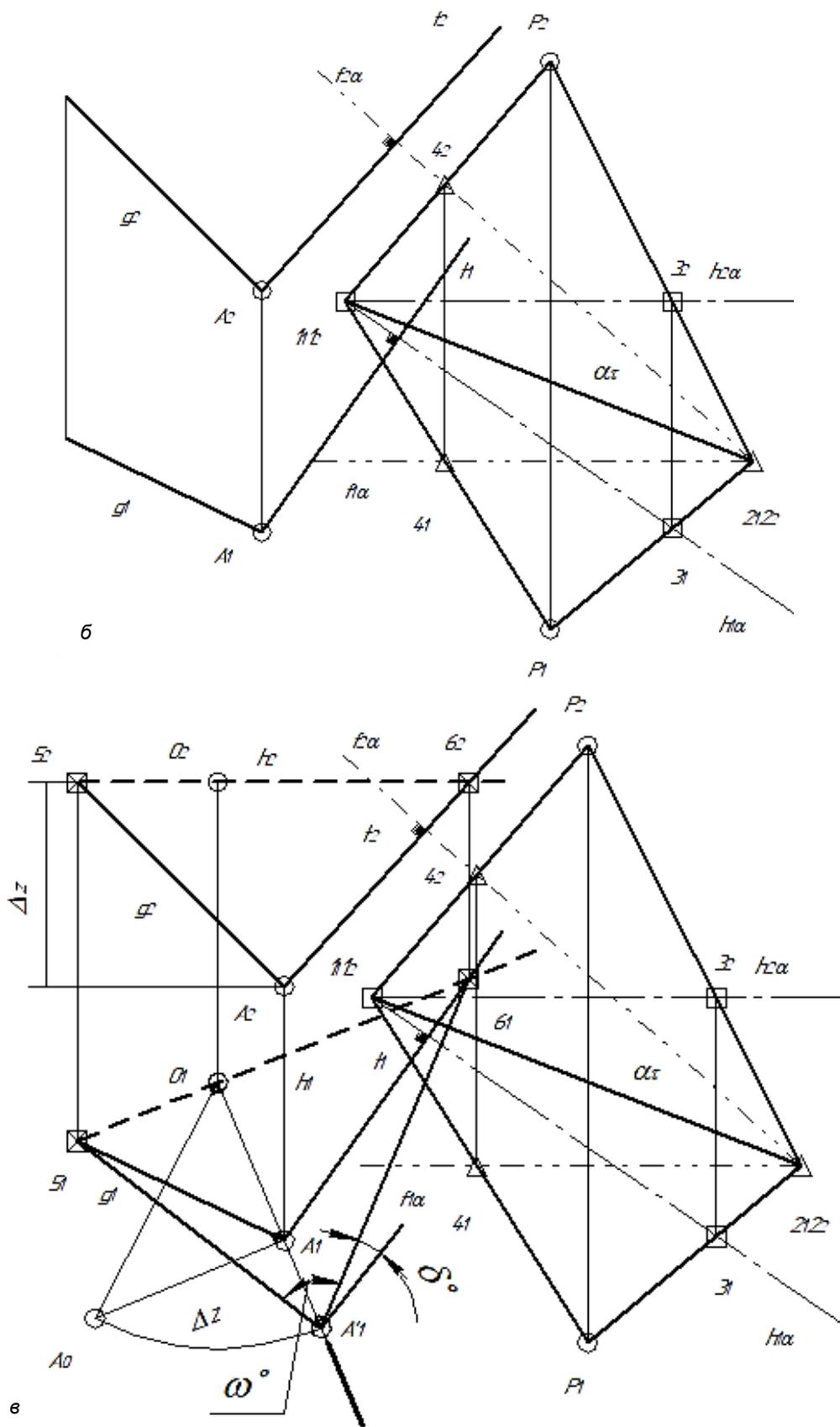


Рис. 6.25 (окончание)

При решении этой задачи (рис. 6.25, а) становится ясно, что плоскость $\alpha(P; \alpha_\tau)$ задана точкой и линией. Перезададим эту плоскость треугольником $\alpha(P; 1; 2)$ (рис. 6.25, б), на линии g возьмем произвольную точку A . Построим главные линии плоскости α : горизонталь и фронталь через точки 13 и 24. Опустим перпендикуляр t к плоскости.

В полученной плоскости $\gamma(g \cap t = A)$ повернем точку A вокруг горизонтали плоскости γ (рис. 6.25, в). Найдем центр вращения точку O , покажем плоскость вращения и переместим в нее точку A , получим положение A' . Покажем угол ω° , достроив его до 90° , покажем искомый угол δ° .

Задача 6.22. Определите натуральную величину двугранного угла между плоскостями, не пересекающимися явно.

Решение.

При необходимости определить угол между двумя плоскостями, не пересекающимися явно, обратимся к рис. 6.26, а.

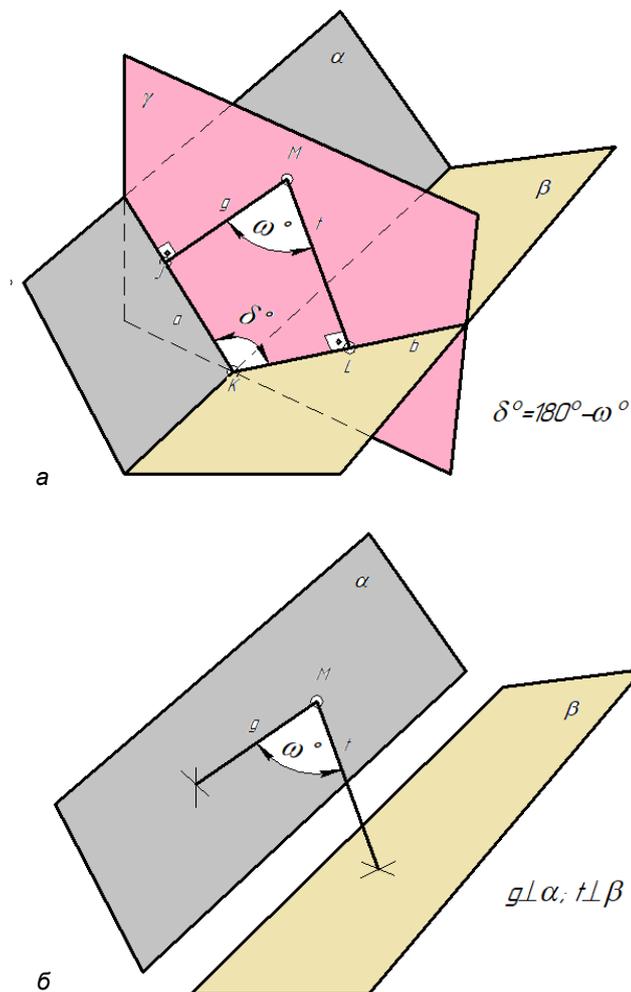


Рис. 6.26

Из любой точки пространства M опустить перпендикуляры в сторону плоскостей α и β ($g \perp \alpha$; $t \perp \beta$) (рис. 6.26, б). Мы получим новую плоскость $\gamma(g \cap t = M)$. Методом вращения вокруг фронтالي плоскости γ найдем противолежащий угол при точке M – ω° , достроив его до 180° , определим нужный нам угол δ° – угол между заданными плоскостями α и β .

Рассмотрим эту задачу на конкретном примере (рис. 6.27, а). Плоскость α задана параллельными прямыми a (a_1b_1), плоскость β задана треугольником $\beta(ABC)$. Определим натуральную величину двугранного угла δ° между этими плоскостями.

Построив перпендикуляры из любой точки пространства M $g \perp \alpha$; $t \perp \beta$, получим плоскость γ (рис. 6.27, б). Определим угол при точке M способом вращения вокруг фронтали (рис. 6.27, в).

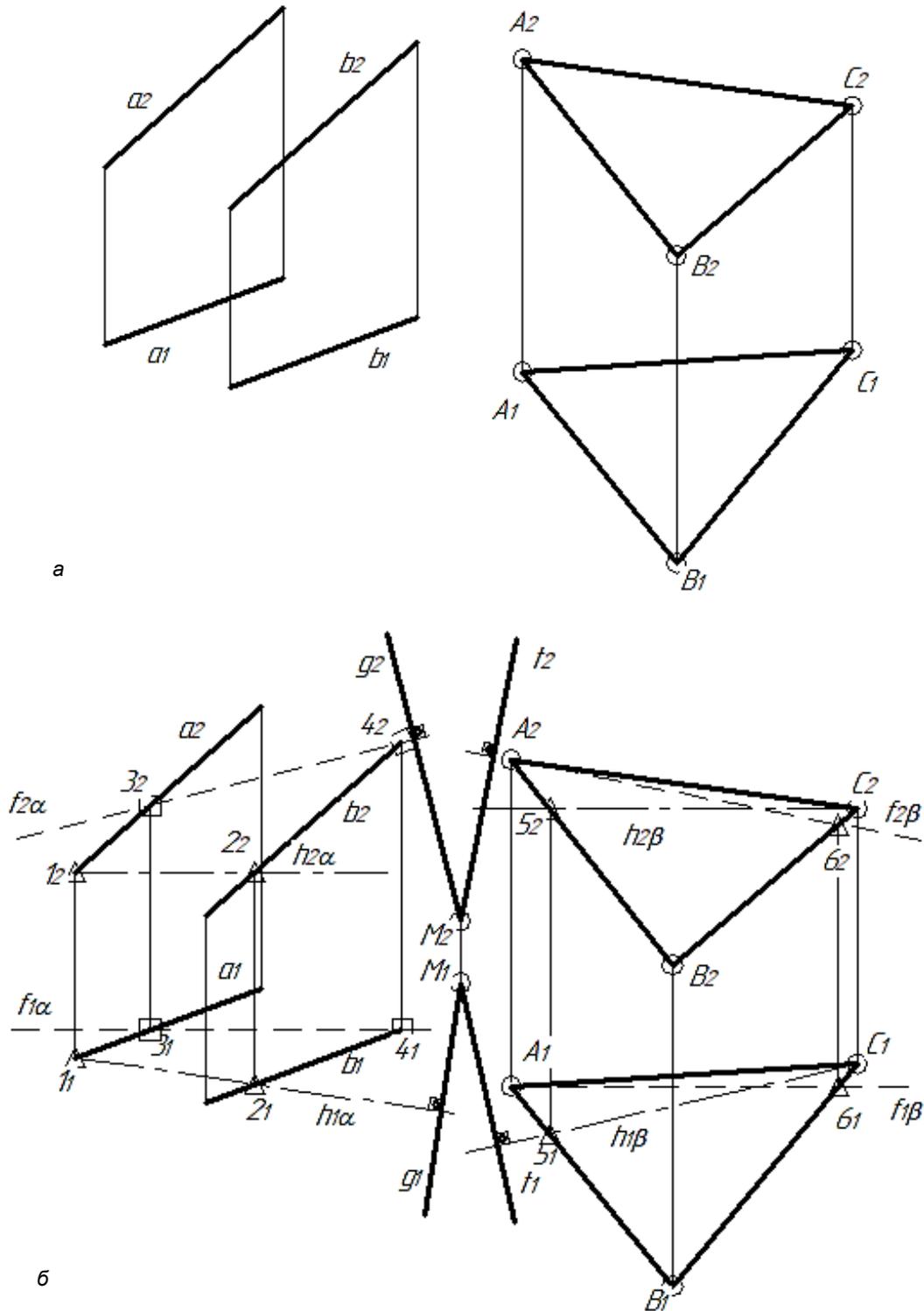


Рис. 6.27 (начало)

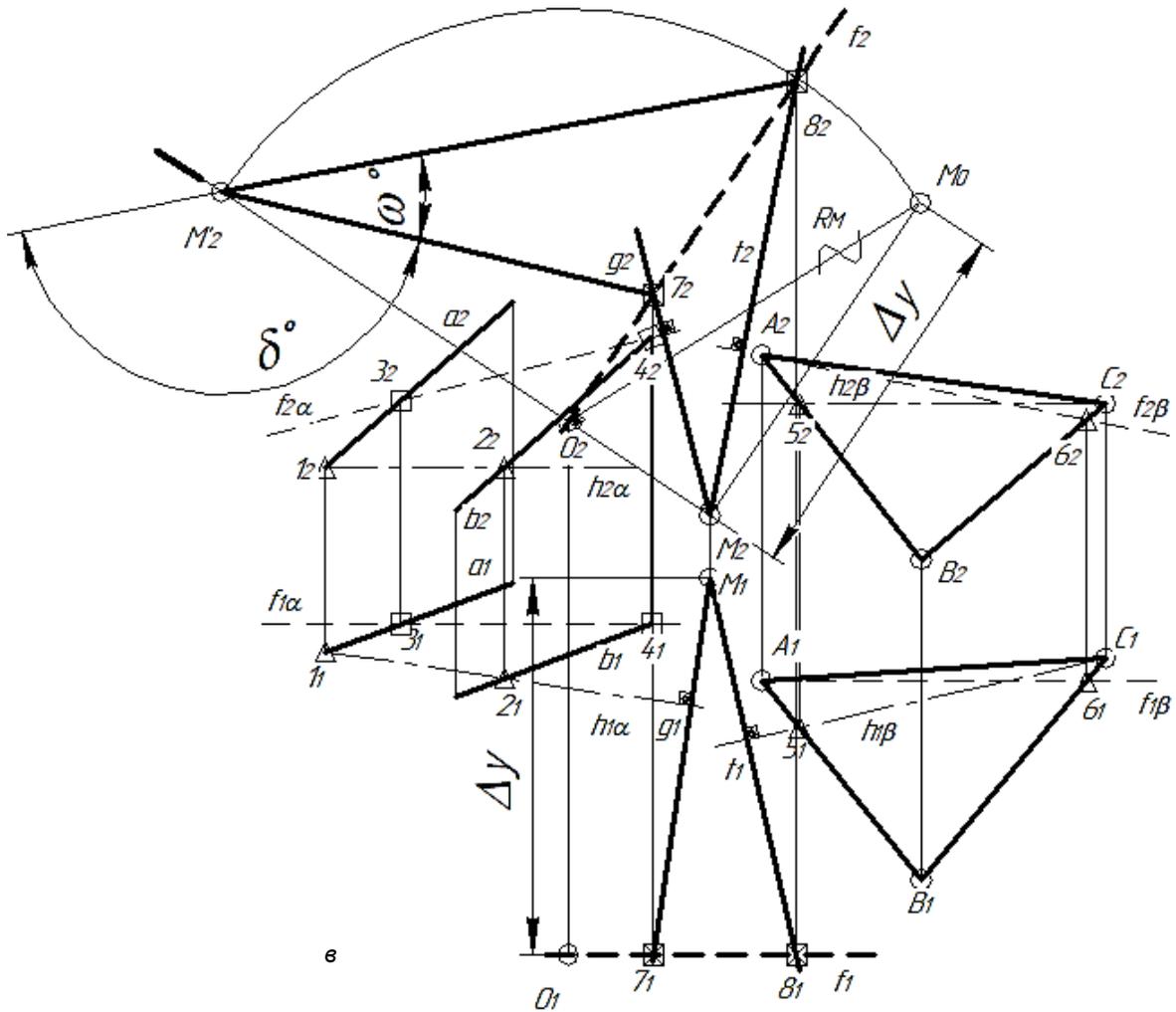


Рис. 6.27 (окончание)

Помимо рассмотренных существуют и другие методы преобразования проекций. В различных изданиях приведены и иные способы определения метрических задач.

7. ПОВЕРХНОСТИ

Количество поверхностей велико и разнообразно, в данном учебном пособии рассмотрены только некоторые. Поверхности могут быть развертываемыми и неразвертываемыми. Примером неразвертываемой поверхности можно считать рельеф земной коры, сферы и др. К развертываемым относят все гранные поверхности, а также некоторые поверхности вращения: конус, цилиндр.

7.1. Гранные поверхности

Гранные поверхности образованы пересечением отрезков плоскостей. Если основание гранной поверхности – *правильный* многоугольник, то многогранник называют *правильным*. У таких поверхностей различают: *основание, боковые грани, ребра и вершины*.

На рис. 7.1 показаны ортогональные проекции неправильных пирамиды (рис. 7.1, а) и призмы (рис. 7.1, б).

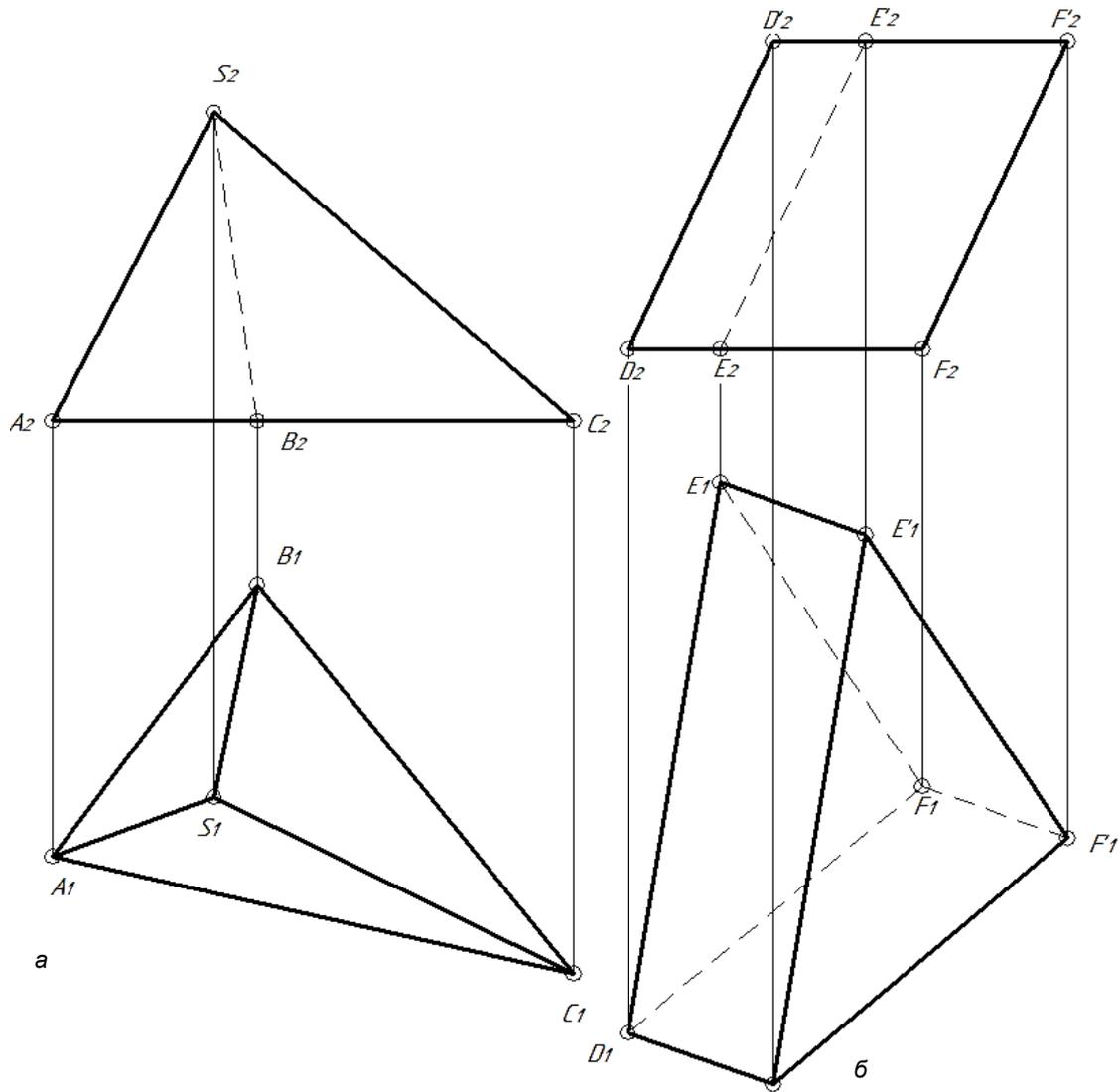


Рис. 7.1

У пирамиды ABC – основание, грани: ABS , BCS , ACS , ребра: AS , BS , CS , вершина – точка S .
 У призмы – два параллельных основания: DEF и $D'E'F'$, ребра, параллельные друг другу: DD' , EE' , FF' .

Положение точек на гранных поверхностях чаще всего определяют методом образующих (рис. 7.2, а). Найдем недостающую проекцию точки N , принадлежащую заданной поверхности.

Задана поверхность пирамиды. Через заданную проекцию точки N проведем образующую, соединяющую вершину S и точку 1 , лежащую в основании ABC . На фронтальной проекции видна одна проекция 1_2 , а на горизонтальной проекции ей подходят две проекции: 1_1 и $1'_1$ (рис. 7.2, б). По линии ортогональной связи покажем два возможных положения точки N на горизонтальной проекции: N_1 и N'_1 (рис. 7.2, в).

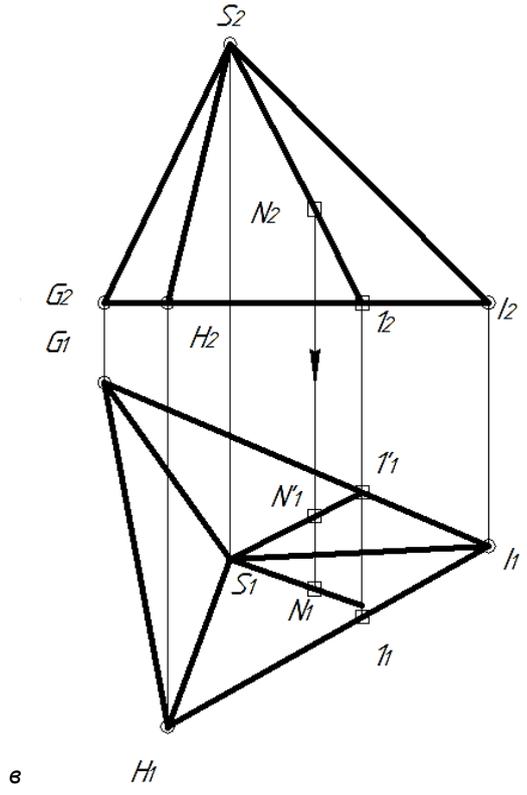
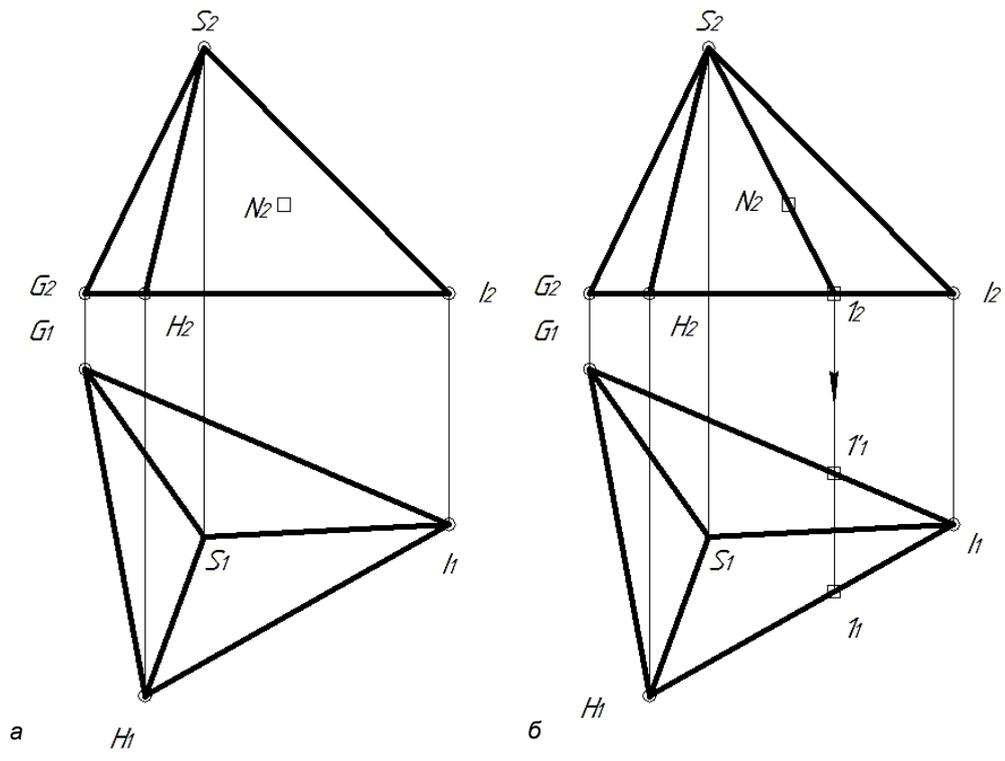


Рис. 7.2

7.1.1. Сечение плоскостью гранной поверхности

Решить задачу на построение фигуры сечения наклонной трехгранной призмы плоскостью $\alpha(\alpha_2)$ можно, определив истинную величину фигуры сечения (рис. 7.3, а).

Перед решением задачи в трехгранной наклонной призме нужно методом конкурирующих точек определить видимость ребер.

Очерковые образующие будут видны на горизонтальной и фронтальной плоскостях. Когда мы смотрим на горизонтальную плоскость проекций со стороны координаты z , у призмы выше основание $A'B'C'$, поэтому его вычертим видимым на горизонтальной проекции, следовательно, ребро BC , принадлежащее второму основанию на горизонтальной плоскости, не видно. На фронтальной плоскости рассмотрим только ребро BB' , так как, когда мы смотрим на фронтальную плоскость со стороны координаты y , это ребро не сразу можно увидеть, следовательно, на фронтальной проекции его мы изобразим невидимым (рис. 7.3, б).

Плоскость $\alpha(\alpha_2)$ задана своим собирательным следом, она занимает фронтально-проецирующее положение. Покажем знак собирательности следа. Плоскость пересекает ребра в точках 1, 2 и 3 на фронтальной проекции. Найдем горизонтальные проекции этих точек: 1, 2 и 3 (рис. 7.3, в) по линиям ортогональной связи из условия принадлежности точки 1 ребру AA' , 2 $\in BB'$ и 3 $\in CC'$. Видимость фигуры сечения на горизонтальной плоскости определяется исходя из видимости граней призмы.

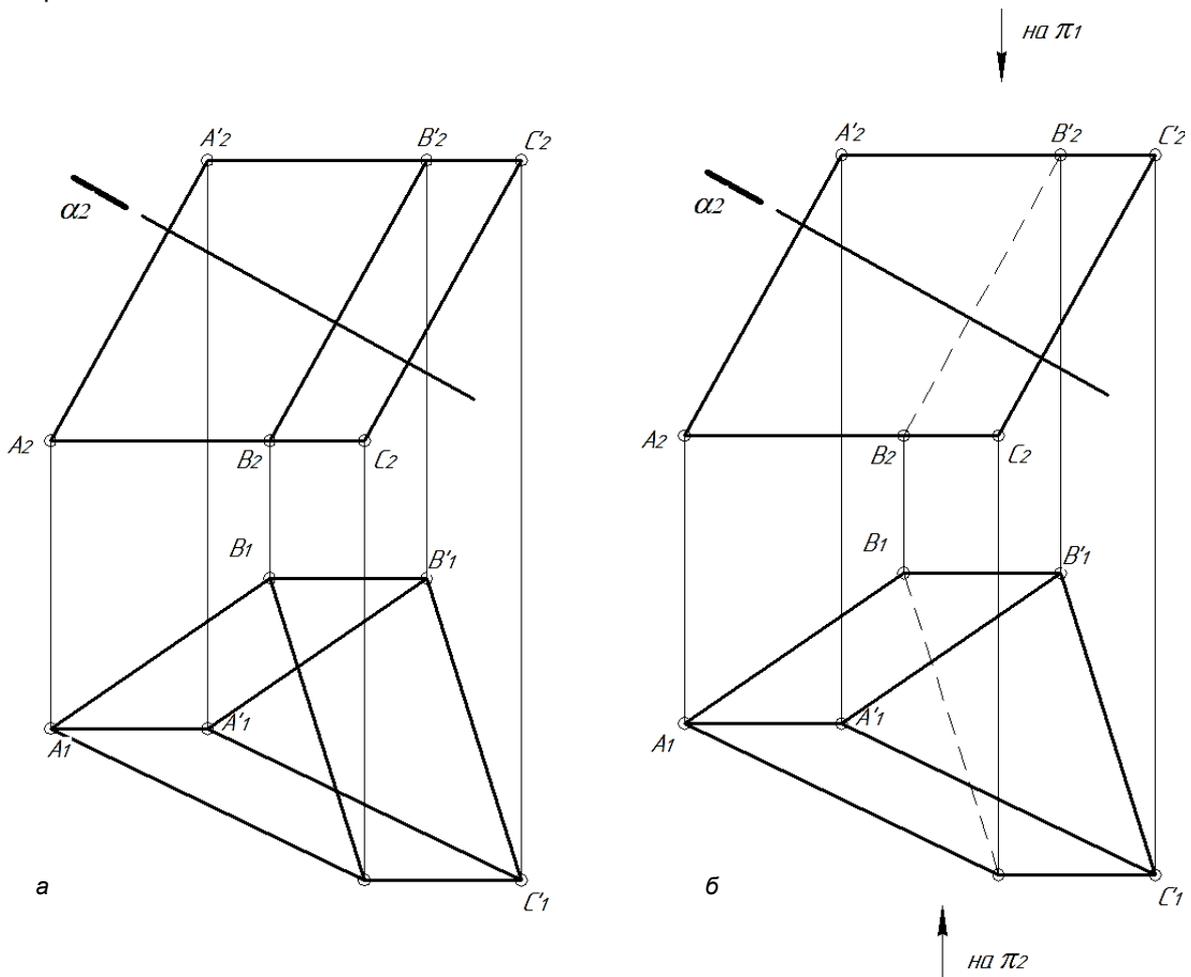


Рис. 7.3 (начало)

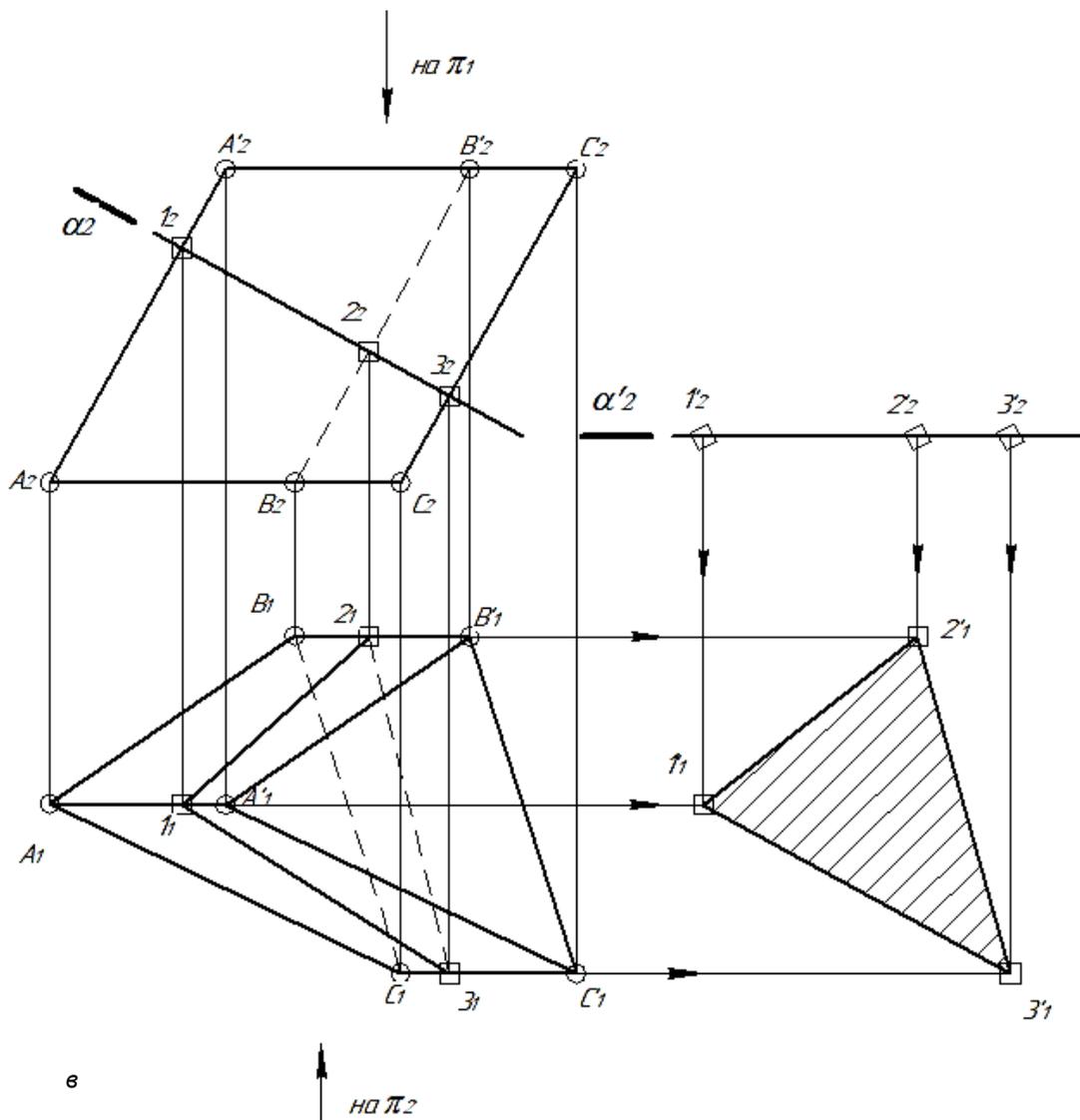


Рис. 7.3 (окончание)

Истинную величину $\Delta 123$ найдем плоскопараллельным переносом (рис. 7.3, в). Построим новый собирательный след $\alpha'_2 \cong \alpha_2$ в любом удобном месте так, чтобы плоскость α' стала плоскостью горизонтального уровня, т.е. $\alpha'_2 \parallel OX$. Точки $1'$, $2'$ и $3'$ получили новые координаты x и имеют старые координаты y . На горизонтальной проекции можно увидеть натуральную величину фигуры сечения призмы фронтально-проецирующей плоскостью.

Решим аналогичную задачу, найдем фигуру сечения гранного тела плоскостью общего положения (рис. 7.4, а).

На эпюре задана поверхность неправильной трехгранной пирамиды $DEFS$ и плоскости $\beta(a \parallel b)$, определим видимость элементов пирамиды методом конкурирующих точек (рис. 7.4, б).

Для решения этой задачи необходимо плоскость общего положения превратить в проецирующую. Удобнее всего сделать это методом перемены плоскостей проекций. Проведем ось x_{12} через основание пирамиды. Ограничим линии a и b отрезками 12 и 34 . Откажемся от системы

плоскостей проекций $x_{12}^{\frac{\pi_2}{\pi_1}}$ в пользу системы $x_{14}^{\frac{\pi_4}{\pi_1}}$. В плоскости β построим горизонталь h . Новую ось проекций x_{14} проведем перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали h_1 .

Перенесем на π_4 все проекции точек, учитывая, что у точек 1 и 3 отрицательные координаты z . Соединим проекции пирамиды с учетом видимости. Наша плоскость β спроецировалась вырождено своим собирательным следом β_4 . Фигура сечения многоугольник $MLKK'$. Вернем проекции этих точек на π_1 и π_2 , из учета принадлежности каждой точки своему ребру. Соединим с учетом видимости элементов (рис. 7.4, в).

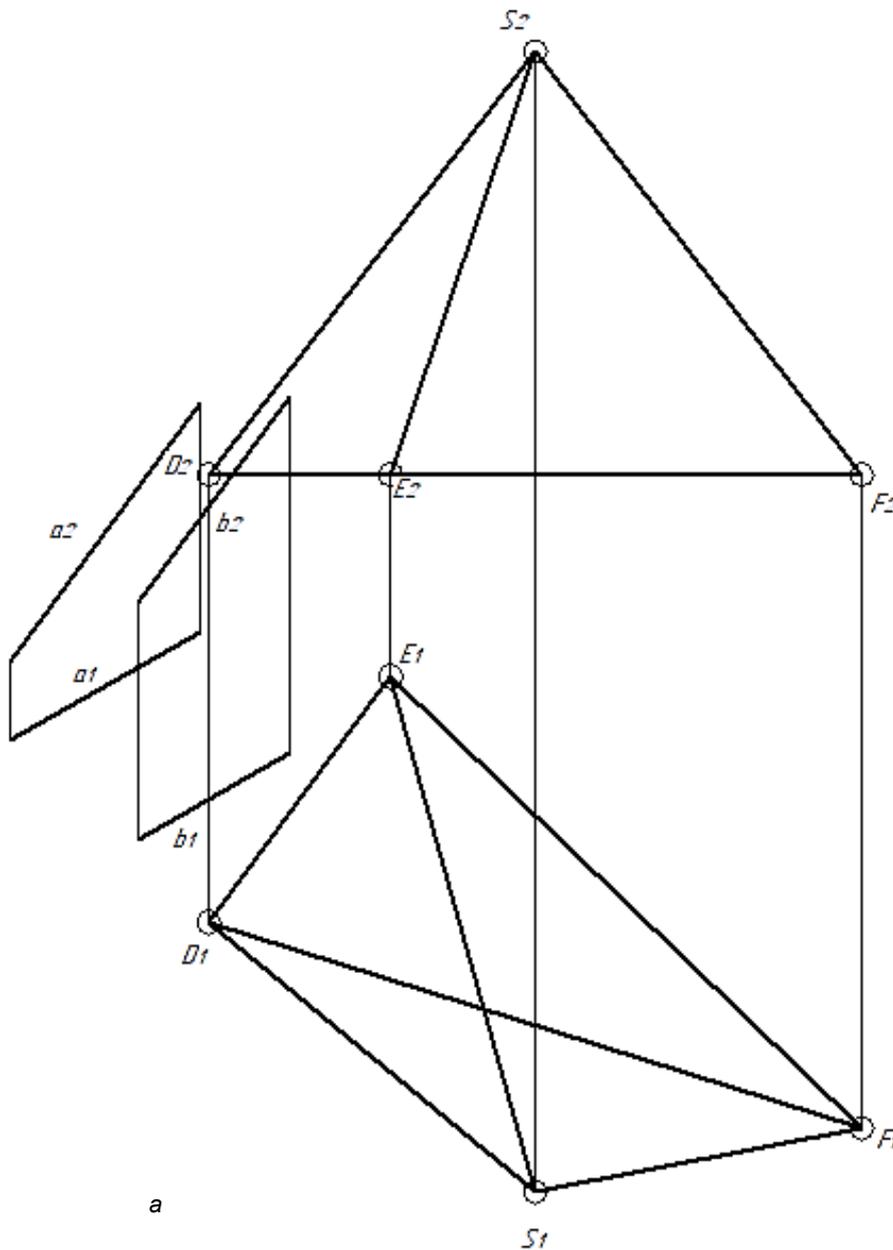


Рис. 7.4 (начало)

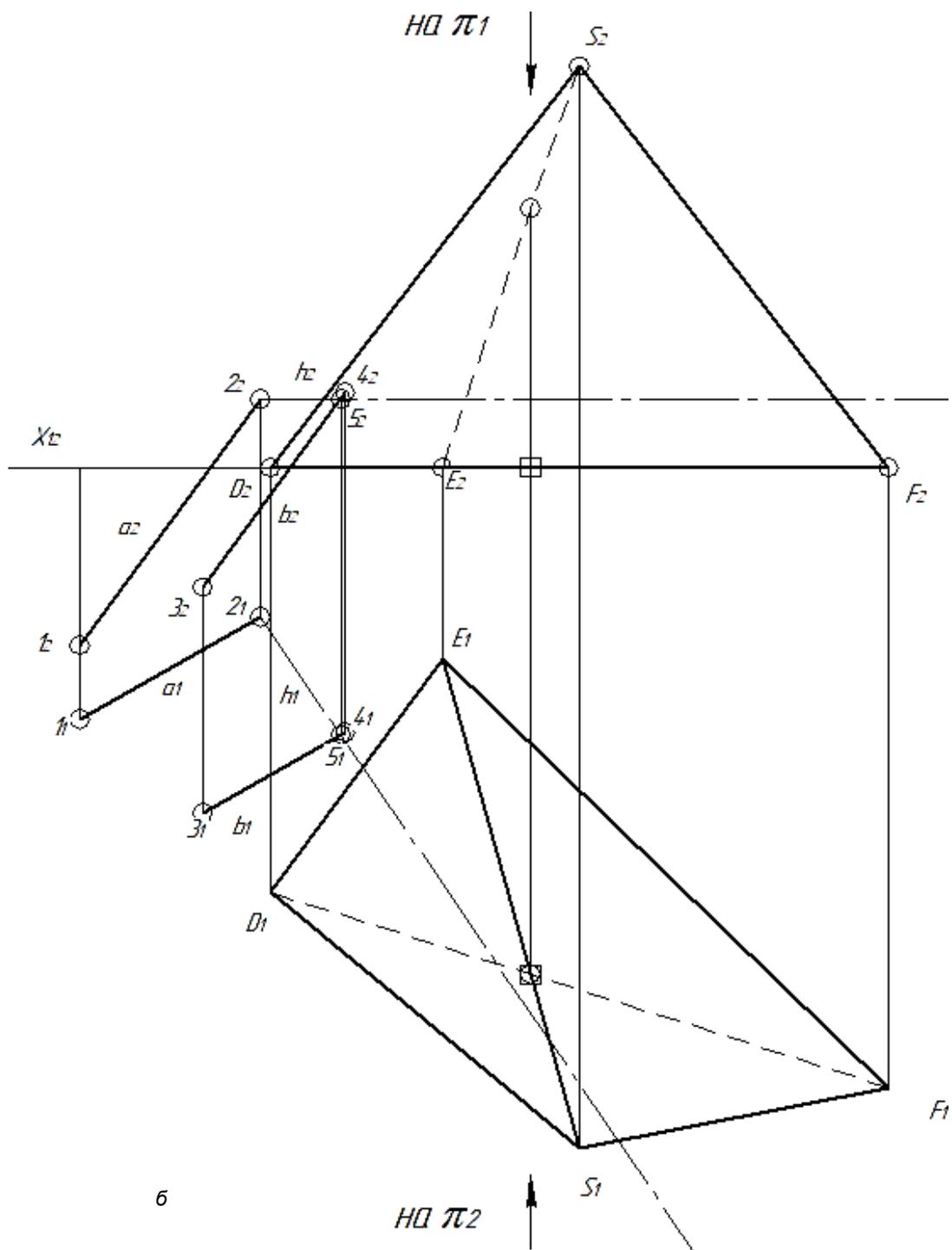


Рис. 7.4 (продолжение)

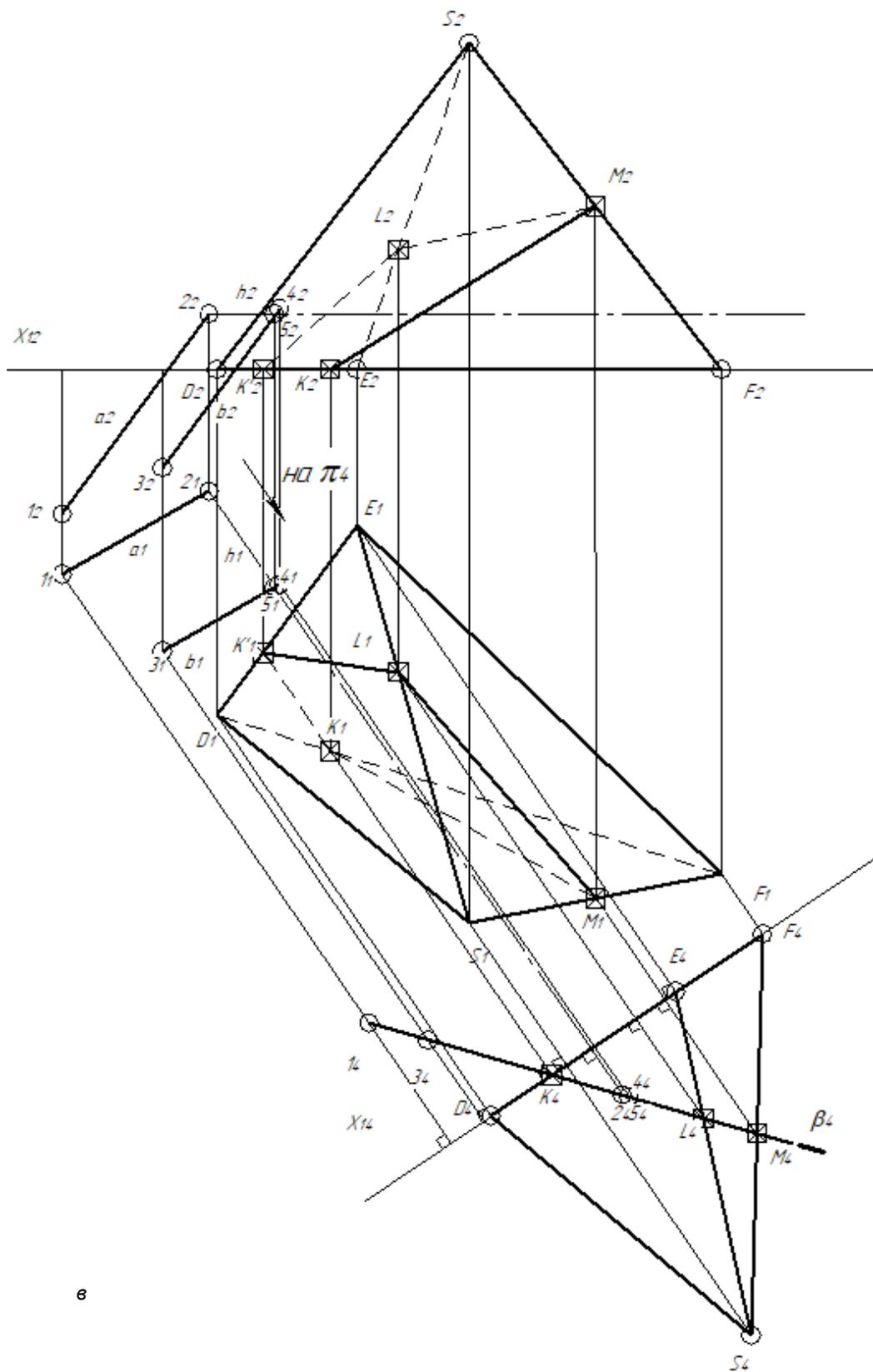


Рис. 7.4 (окончание)

7.1.2. Определение точек встречи прямой и гранной поверхности

Решим данную задачу на примере рис. 7.5, а.

На эюре задана трехгранная наклонная призма и прямая l , найдем точки пересечения прямой и гранного тела, далее определим видимость прямой.

Задачу начнем решать с определения видимости элементов трехгранной наклонной призмы $ABCA'B'C'$ (рис. 7.5, б). Очерковые образующие видны наблюдателю на обеих проекциях. Взгляд наблюдателя на π_2 показывает, что основание ABC ближе, его мы увидим на π_2 , следовательно, часть основания $B'C'$, $A'C'$ и ребро CC' наблюдателю на фронтальной плоскости не видны. На горизонтальной плоскости проекций рассмотрим только ребро BB' . На фронтальной плоскости это ребро попадает первым взглядом наблюдателя, поэтому его изображаем видимым на горизонтальной плоскости проекций.

За пределами очерка прямая l видна наблюдателю, поэтому внутри очерков призмы проекции прямой сначала покажем линией невидимого контура.

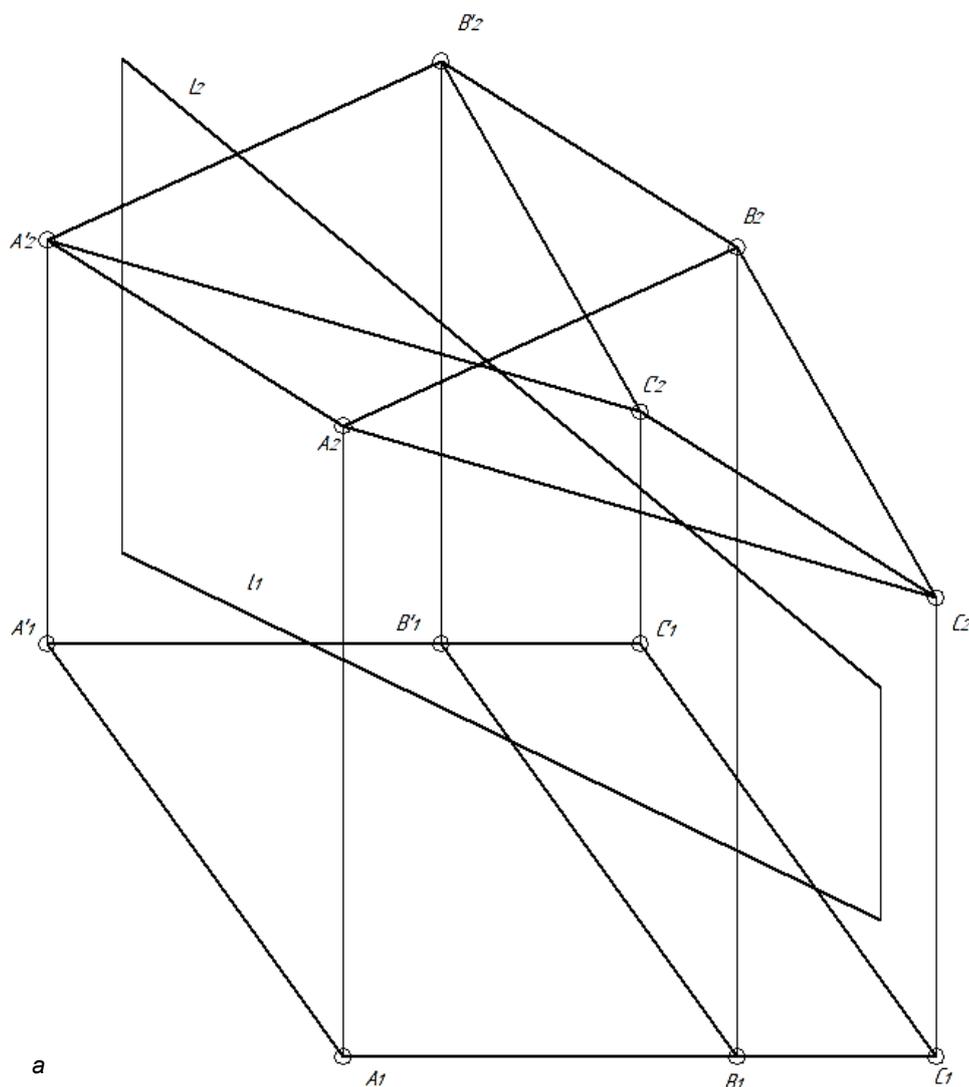
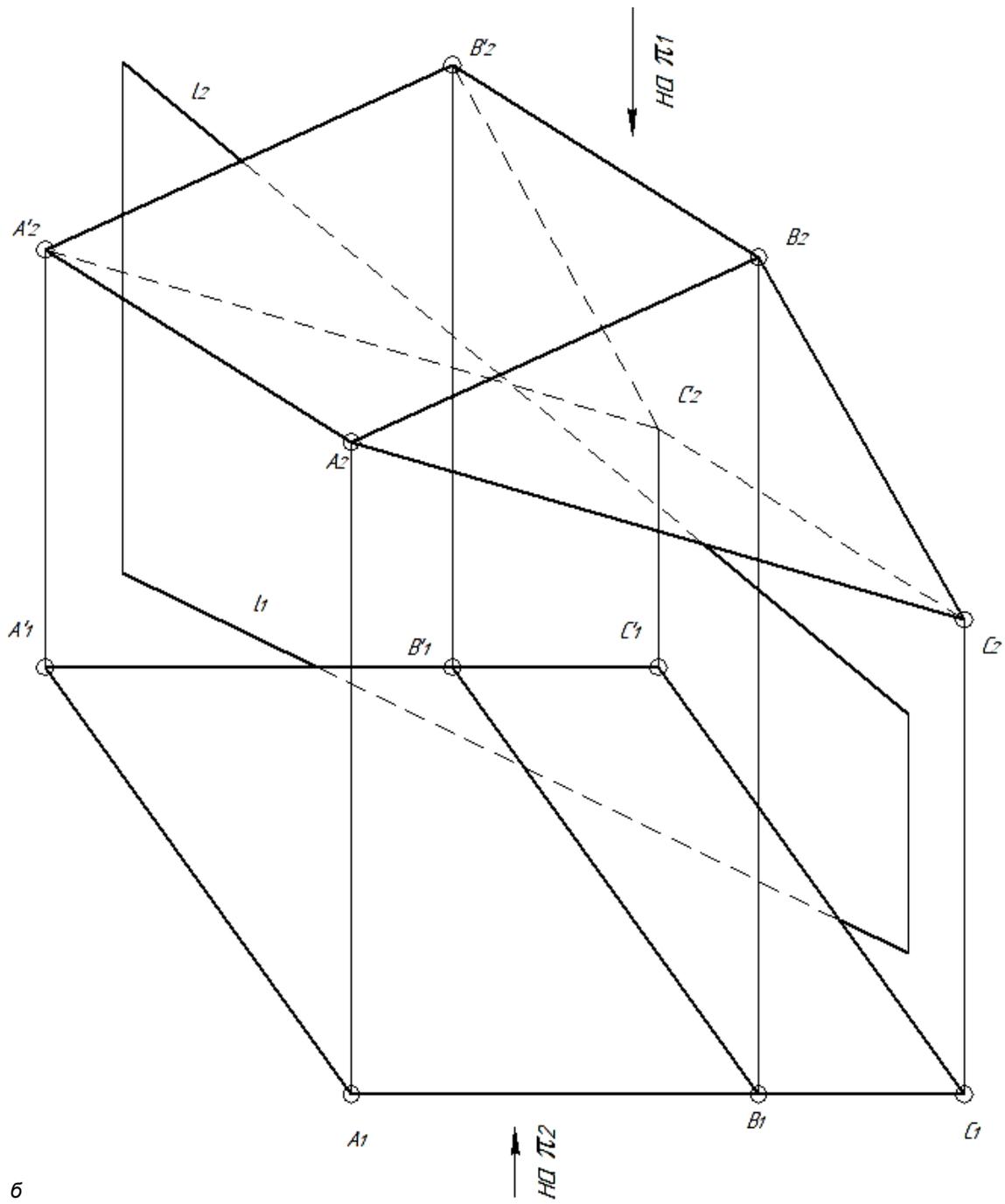


Рис. 7.5 (начало)



6

Рис. 7.5 (продолжение)

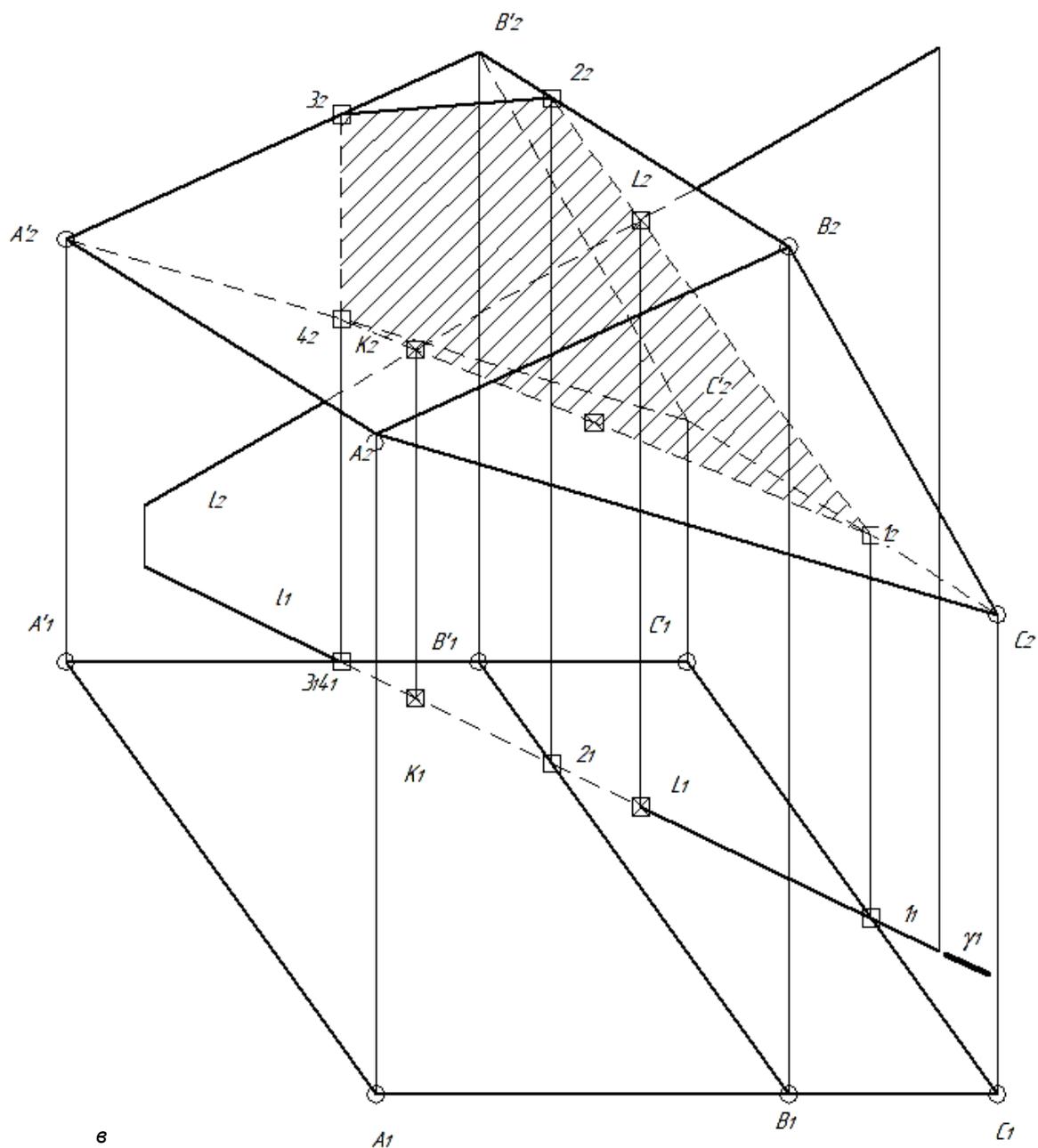


Рис. 7.5 (окончание)

Заклучим прямую l в любую проецирующую плоскость, например, в горизонтально-проецирующую плоскость $\gamma(\gamma_2)$. Плоскость γ пересечет призму по четырехугольнику. Найдем его проекции на фронтальной плоскости, соединим с учетом видимости элементов. Для наглядности заштрихуем фигуру сечения. Точки входа и выхода фронтальной проекции прямой в фигуру сечения являются искомыми. Это точки K и L . По линиям связи покажем их на горизонтальной плоскости. На фронтальной проекции обе точки для наблюдателя невидимы. На горизонтальной плоскости видна только точка L , принадлежащая видимой грани $BB'CC'$. Точка K невидима на π_1 , так как принадлежит невидимой грани $AA'CC'$ (рис. 7.5, в).

7.2. Поверхности вращения

Общий вид поверхности вращения получается, если вращать плоскую кривую g вокруг оси вращения i (рис. 7.6).

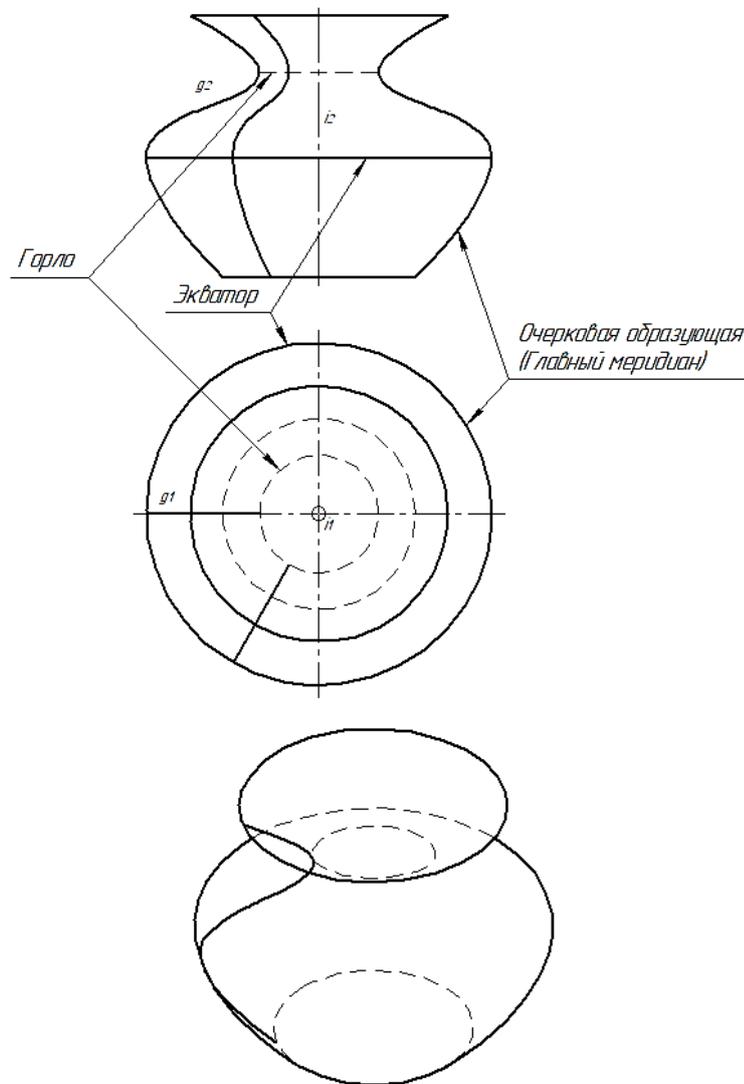


Рис. 7.6

Каждая точка плоской кривой g вращается вокруг оси вращения i по своей окружности – *параллели* – кратчайшего расстояния от оси вращения до искомой точки кривой g .

Крайние положения кривой называют *очерковыми*, или *очерком* поверхности. Самое узкое место (самая маленькая параллель) называется *горлом*, самое широкое – *экватором*. Точки, принадлежащие поверхности вращения, определяют через поиск своей параллели.

Поверхности вращения разделяют на *развертываемые* (конус, цилиндр), при этом образующими являются отрезки прямых, и *неразвертываемые*, где образующими являются плоские кривые, например, тор.

Определим недостающие проекции точек ABC , принадлежащих заданной поверхности (рис. 7.7, а).

Определим параллели, на которых расположены эти точки. Покажем их радиусы вращений и отнесем на них недостающие проекции точек (рис. 7.7, б).

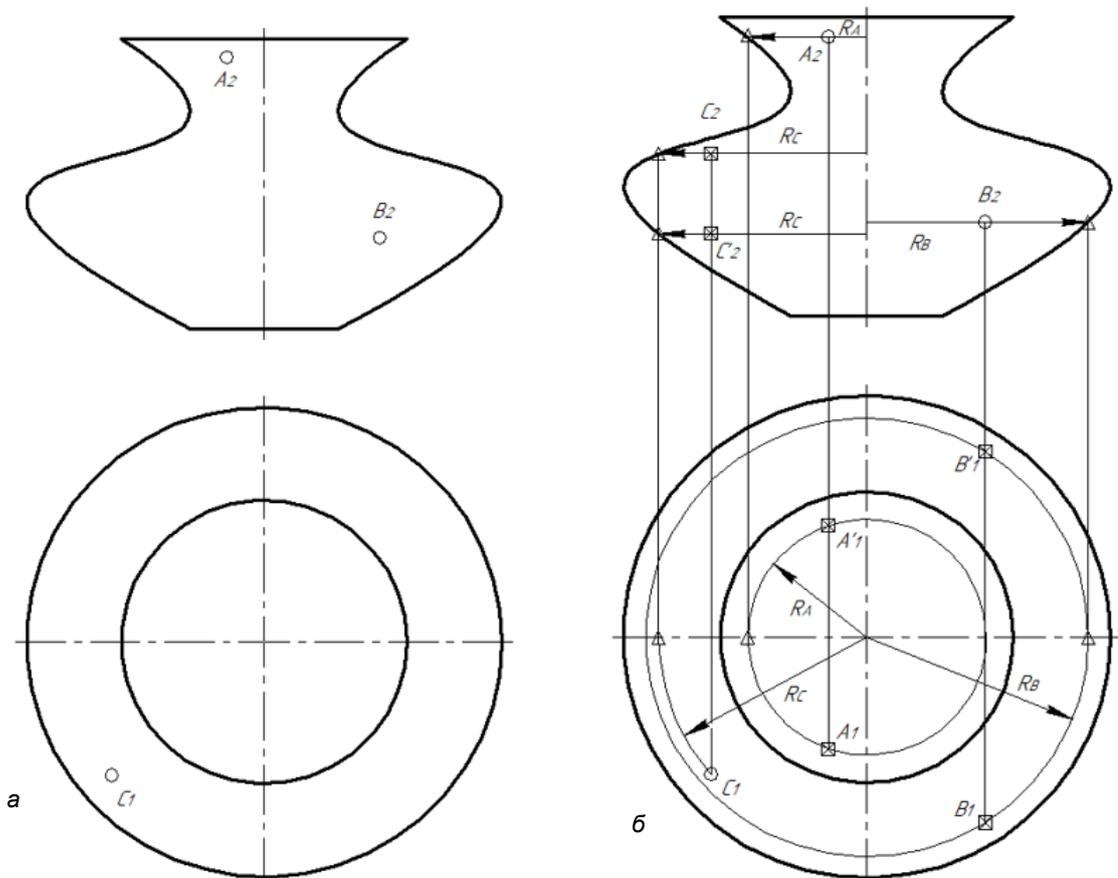


Рис. 7.7

Примером неразвертываемой поверхности вращения могут быть торовые поверхности (рис. 7.8). Открытый тор (рис. 7.8, а), закрытый тор – сфера (рис. 7.8, б).

На поверхности торов были заданы проекции точек: D_2 и E_1 у открытого тора, F_2 , G_2 , I_1 и H_1 – у сферы. Следует определить недостающие проекции точек, принадлежащих заданным поверхностям. Этапы построения:

1. Определить параллель, которой принадлежит точка, показать радиус вращения;
2. Найти искомый радиус вращения на второй проекции по линиям ортогональной связи;
3. Показать положение недостающих проекций точек по линиям ортогональной связи.

Количество искоемых проекций зависит от того, какой параллели принадлежит точка. Например, у точки D две параллели, соответственно на горизонтальной проекции есть четыре возможных положения D .

Точка F расположена на очерковой образующей (главном меридиане), поэтому на горизонтальной проекции для нее только одно возможное положение.

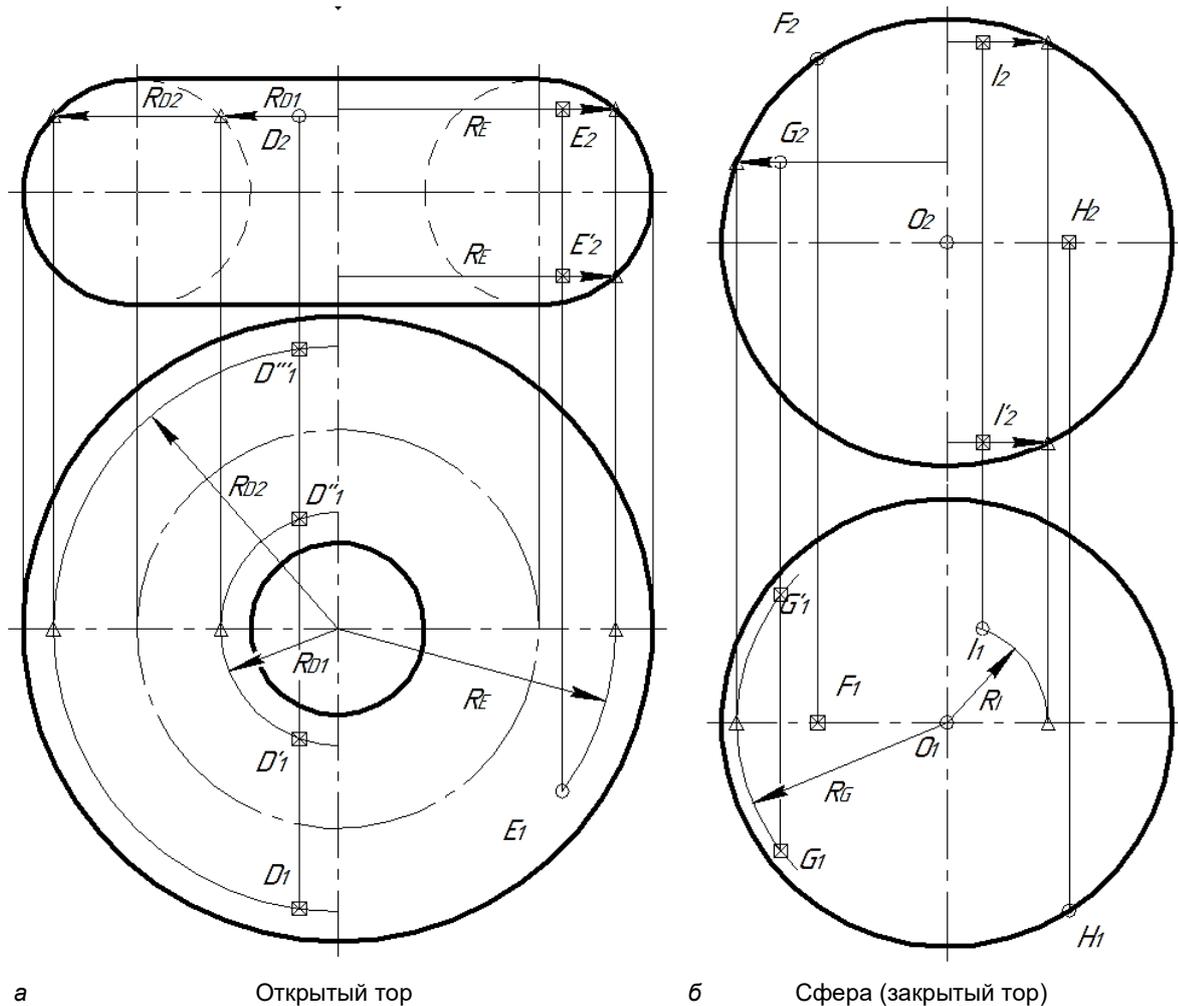


Рис. 7.8

Рассмотрим положение точек на развертываемых поверхностях вращения: конусе и цилиндре.

Определим недостающие проекции точек наклонного кругового конуса (рис. 7.9, а).

Следует искать точки, не только используя метод параллелей (рис. 7.9, б), но и метод образующих (рис. 7.9, в).

Прежде, чем решить задачу поиска недостающих проекций точек, принадлежащих заданному телу наклонного кругового конуса с вершиной в точке S и центром основания точкой O , определим его видимость. На фронтальной проекции видны только очерковые образующие. Так как наблюдатель видит на фронтальной проекции сначала боковую поверхность, то на горизонтальной проекции часть доньшка невидима: от точек касания касательных очерковых образующих, идущих из вершины конуса S к его основанию.

Искать недостающие проекции N и P методом параллелей легко, так как заданы фронтальные проекции. Находим радиусы вращений этих точек (искомые параллели). Найдя расстояние от оси вращения до очерковой образующей, строим эти радиусы на горизонтальной проекции из своих центров, принадлежащих оси вращения. На своих параллелях получаем недостающие проекции (рис. 7.9, б).

Следует отметить, что по заданной горизонтальной проекции точки Q найти радиус вращения нельзя. Можно получить только одну фронтальную проекцию точки Q из условия принадлежности ее доньшку. А вот второе ее возможное положение на боковой поверхности можно быстро определить, используя метод прямолинейных образующих (рис. 7.9, в).

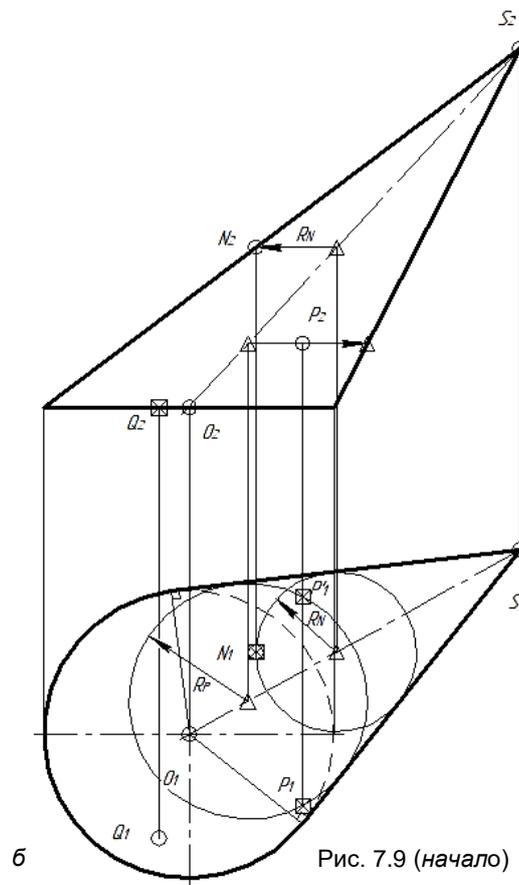
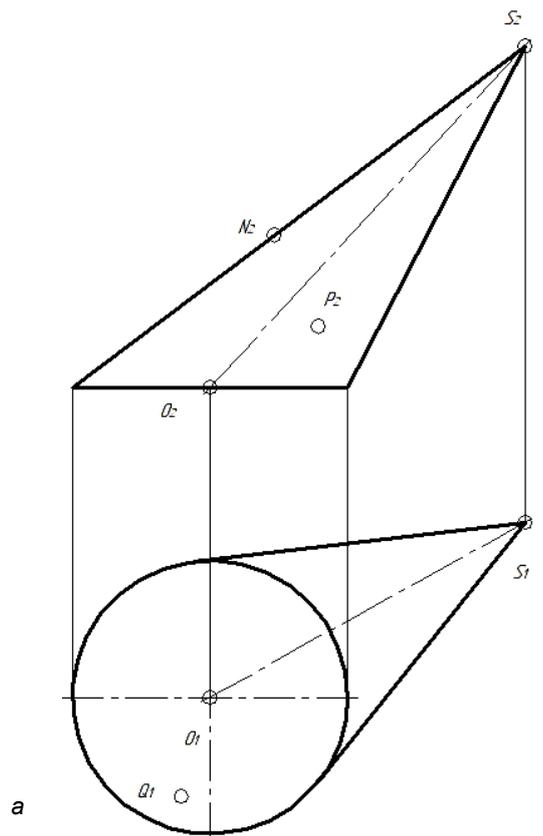


Рис. 7.9 (начало)

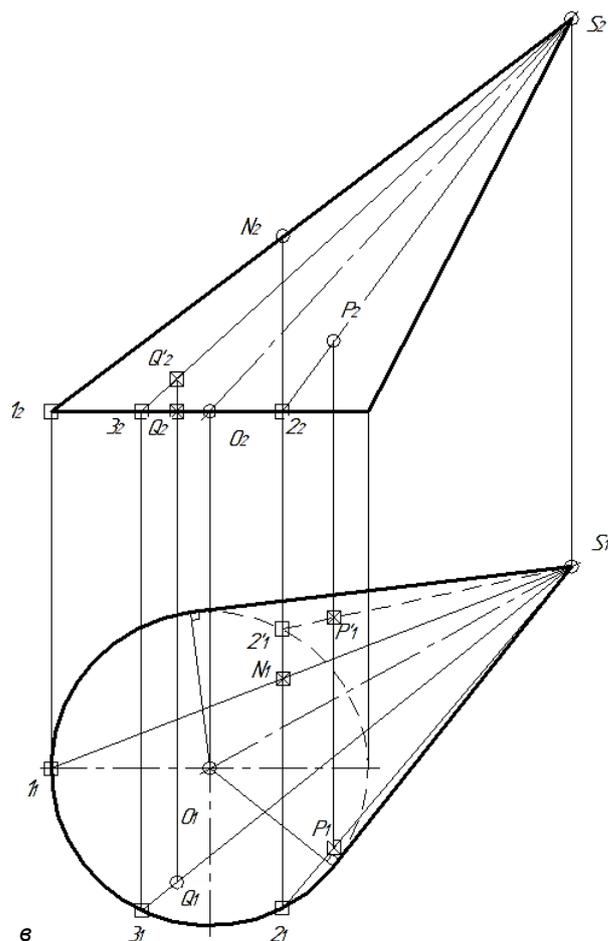


Рис. 7.9 (окончание)

Образующие – это отрезки, соединяющие вершину конуса и любые точки очерка основания. Проекция точки N принадлежит очерковой образующей на фронтальной проекции $S1$. На горизонтальной проекции образующая $S1$ не является очерковой. Для точки P – образующая $S2$. У точки 2 в основании два положения на горизонтальной проекции: на видимой части основания и невидимой. Соответственно образующая $S12_1$ видима, а $S12'_1$ невидима.

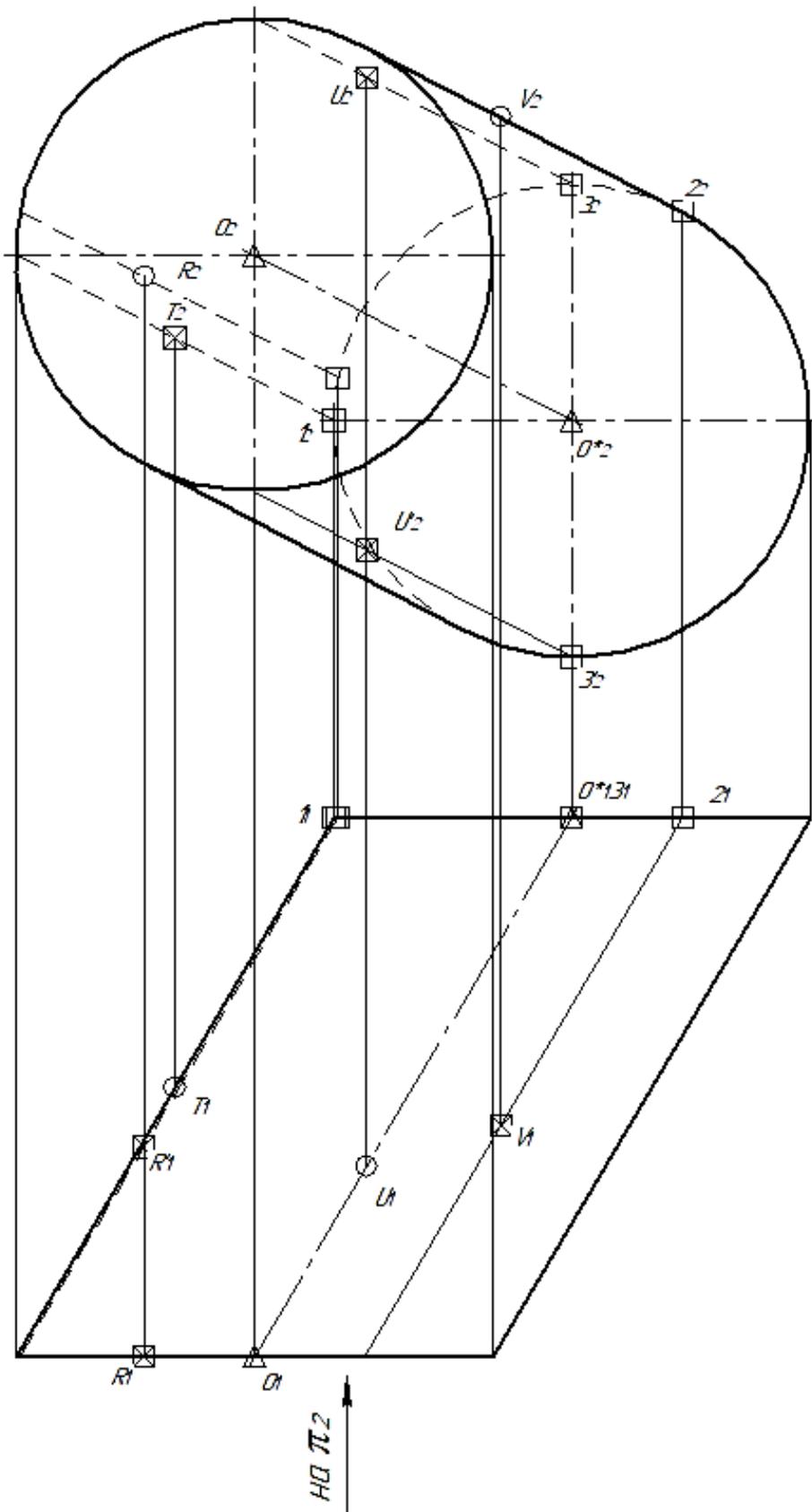
При использовании этого метода можно легко определять видимость проекций образующих. На горизонтальной проекции видны все образующие, опирающиеся на видимую часть основания. На фронтальной проекции нам видны те образующие, которые опираются на горизонтальной плоскости на основание конуса ниже горизонтальной центральной линии.

Построим недостающие проекции точек, принадлежащие наклонному цилиндру (рис. 7.10, а). Решим задачу, используя метод образующих (рис. 7.10, б).

Определим сначала видимость наклонного цилиндра.

На горизонтальной плоскости показан четырехугольный очерк целиком. Видимыми здесь будут образующие, расположенные выше горизонтальных центральных линий оснований.

На фронтальную проекцию посмотрим со стороны оси u . Основание с центром в точке O ближе к наблюдателю, чем основание с центром в точке O^* . Основание с центром в точке O будет целиком видно на фронтальной проекции. Основание с центром в точке O^* будет видно от точек касания прямолинейных очерковых образующих.



6

Рис. 7.10 (окончание)

Если точка принадлежит очерковой образующей, то на второй проекции у нее только одно возможное положение. Если точка на произвольной образующей, то таких положений два.

Следует отметить, что точка R может принадлежать основанию и боковой поверхности.

Определив видимость тела, легко определить видимость точек, принадлежащих наклонному цилиндру.

7.2.1. Определение фигуры сечения поверхности вращения

Рассмотрим задачу на примере прямого кругового конуса и сферы.

При сечении конической поверхности проецирующей плоскостью, в зависимости от положения секущей плоскости, можно увидеть пять фигур (рис. 7.11). Такие фигуры называют *кониками*.

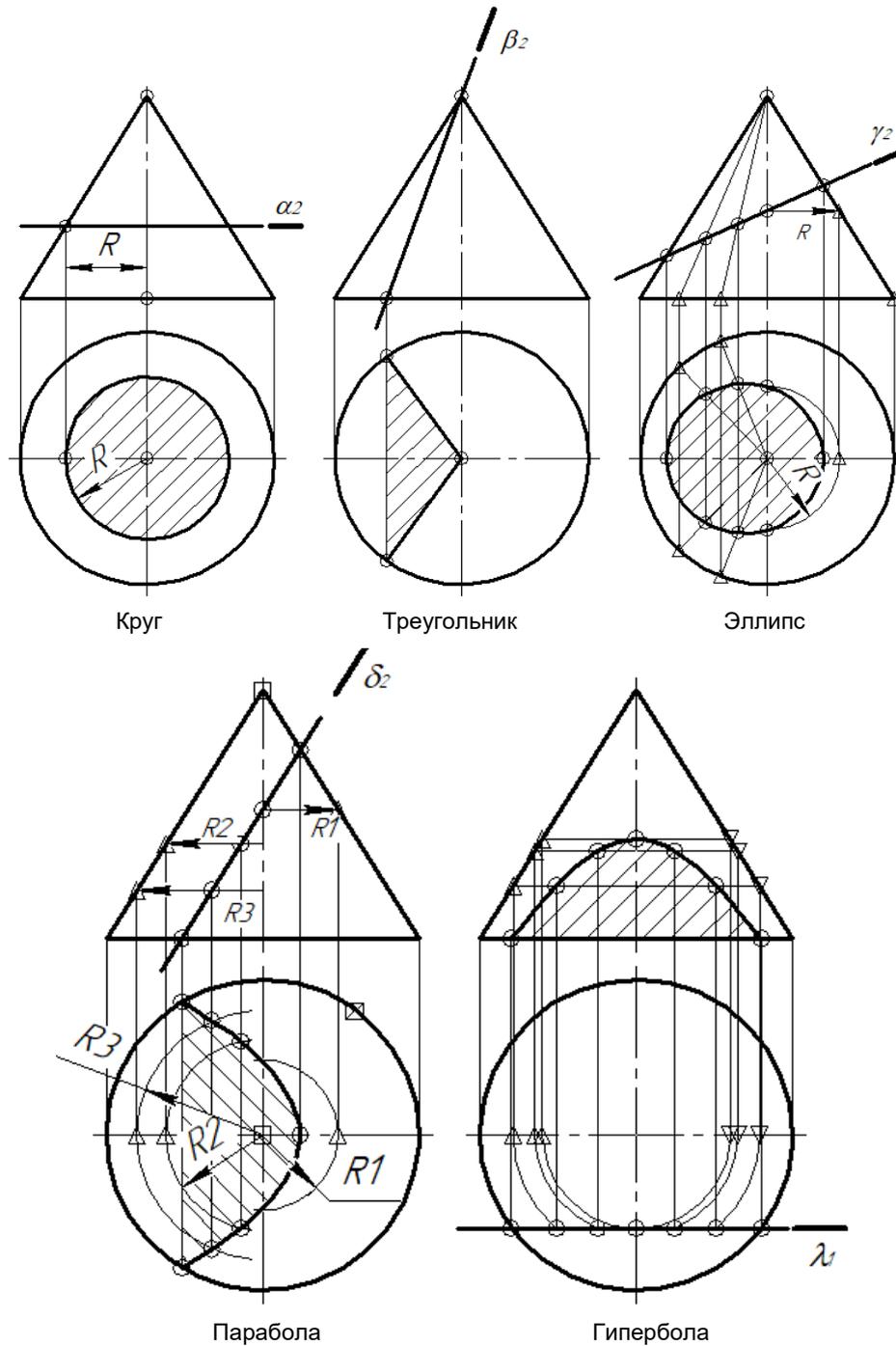


Рис. 7.11

Если секущая плоскость параллельна основанию конуса, то в сечении получается *круг*.

Если секущая плоскость проходит через вершину конической поверхности, то в сечении получается *треугольник*, так как рассечение происходит по образующим.

Если секущая плоскость пересекает обе образующие под каким-то углом к оси вращения поверхности, то фигурой сечения будет *эллипс*.

Если секущая плоскость пересекает одну очерковую образующую и параллельна второй, то получается *парабола*.

Если секущая плоскость параллельна оси вращения поверхности и не проходит через вершину конуса в сечении, то получается *гипербола*.

Первые два коника строить легко, но для построения кривых второго порядка (эллипса, параболы и гиперболы) следует взять не менее 7–8 произвольных точек, принадлежащих заданной поверхности.

Ход построения фигур сечения прямого кругового конуса наглядно показан на рис. 7.11.

При сечении сферы любой плоскостью всегда получается *круг*. Если секущая плоскость параллельна *экватору* или *главному меридиану*, то *круг* проецируется в истинную величину. В противном случае круг проецируется как *эллипс* (рис. 7.12).

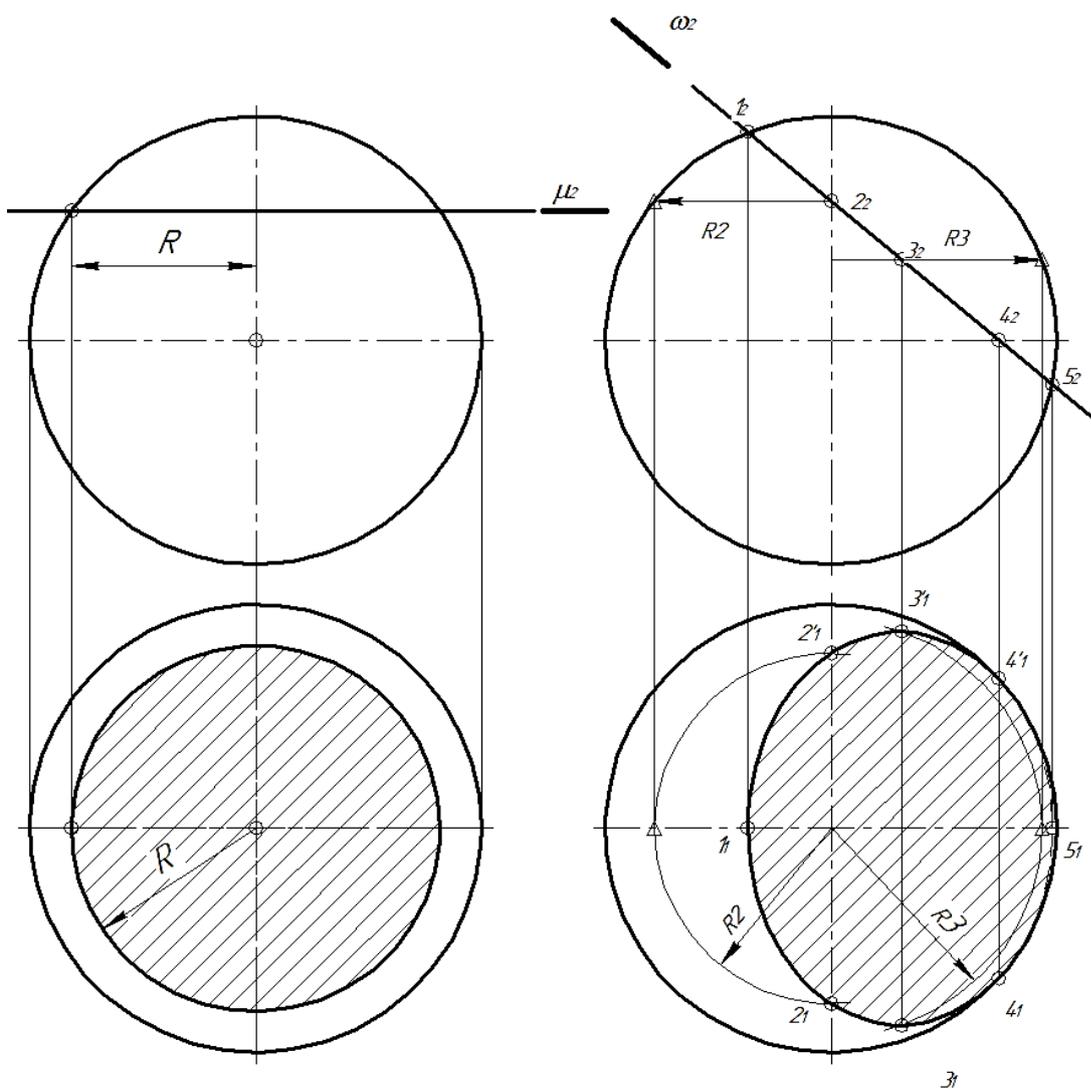


Рис. 7.12

При построении эллипса важно помнить, что точки 1, 4, и 5 занимают характерное положение. Точки 1 и 5 принадлежат *главному меридиану*, поэтому на горизонтальной проекции они проецируются один раз на горизонтальную ось центральной линии (это проекция *главного меридиана* на горизонтальной плоскости). Точка 4 принадлежит экватору, ее два положения на горизонтальной плоскости находятся сразу на очерковой образующей (это проекция экватора). Для точек 2 и 3 следует найти параллели (определяем радиусы вращения).

Построив фигуру сечения, будем помнить о видимости: на горизонтальной плоскости видны все точки, расположенные на фронтальной плоскости выше *экватора*, т.е. линия $4'15_14_1$ для наблюдателя невидима. На фронтальной плоскости проекции видны все точки, расположенные на горизонтальной плоскости до *главного меридиана* поверхности сферы.

Если необходимо определить истинную величину фигуры сечения, то эту задачу решают любым способом преобразования проекций. Рассмотрим задачу на примере сначала наклонного конуса, а потом наклонного цилиндра.

Необходимо построить натуральную величину фигуры сечения геометрического тела заданной плоскостью (рис. 7.13, а). Задано тело наклонного кругового конуса, определим его видимость.

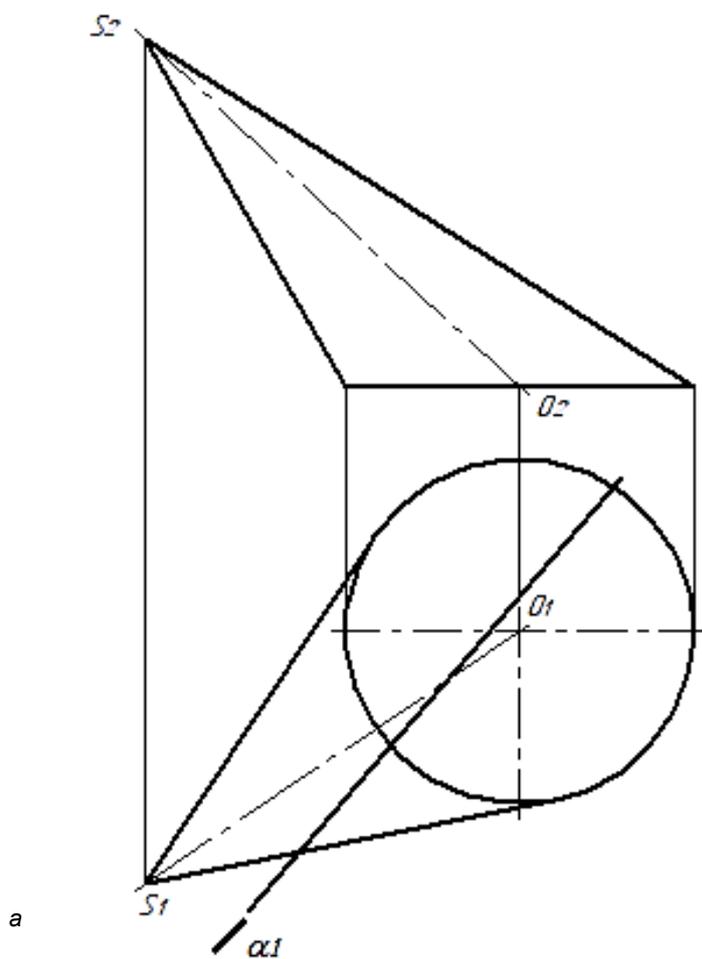


Рис. 7.13 (начало)

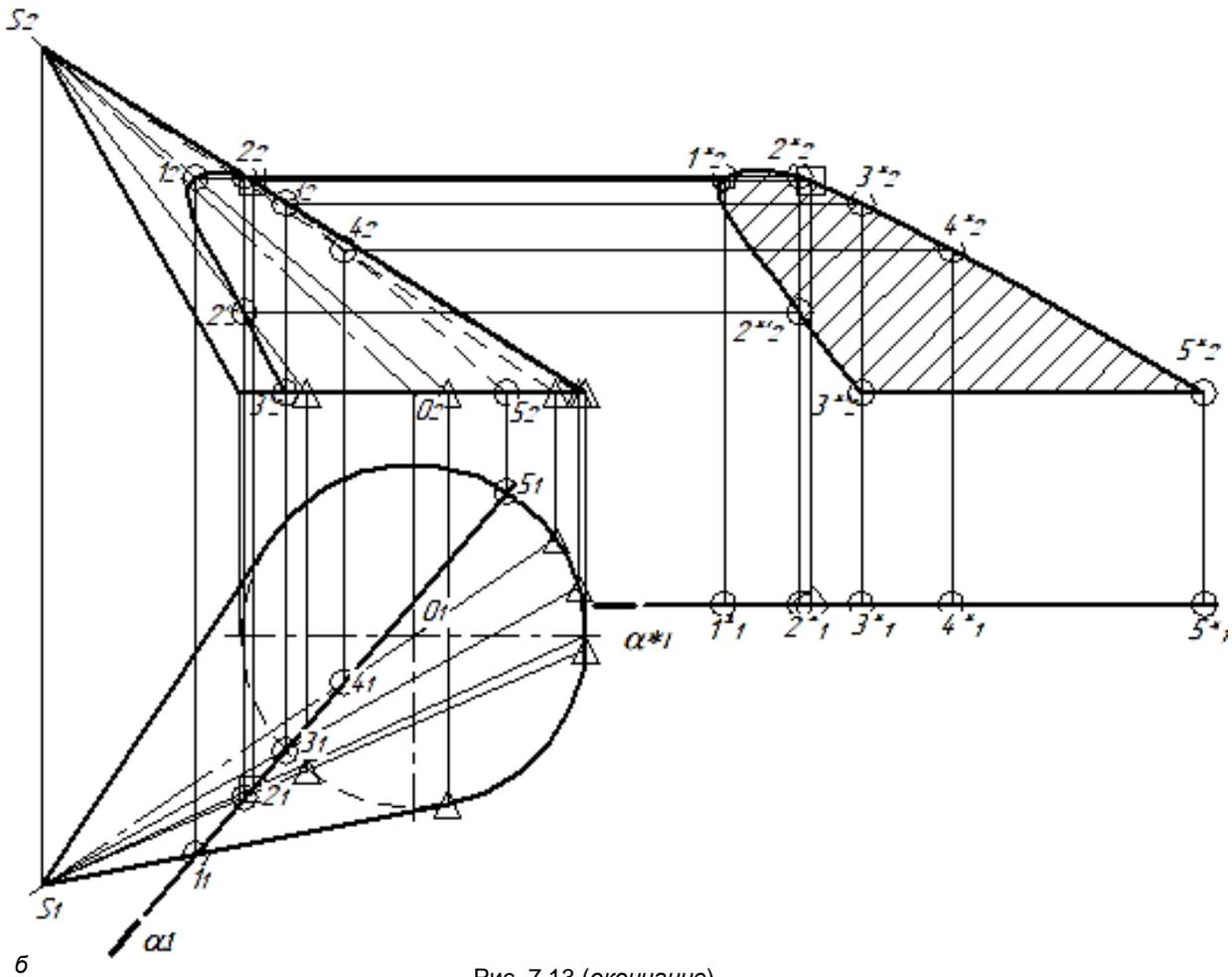


Рис. 7.13 (окончание)

Так как на фронтальной проекции основание располагается ниже боковой поверхности, то часть основания на горизонтальной плоскости проекций не видна.

Произвольным образом расположим точки, принадлежащие плоскости сечения и конической поверхности.

Найдем проекции характерных точек: 3 и 5, остальные проекции определим, используя метод образующих. Проекции точек основания образующих показаны треугольником, проекции точек фигуры сечения – круглые. Не забудем про точку, лежащую справа на очерковой образующей, на фронтальной плоскости проекций. Она будет границей между видимой линией пересечения и невидимой. На эюре (рис. 7.13, б) показана безымянной (квадратная). Левую очерковую образующую на фронтальной плоскости секущая плоскость не пересекает.

После определения точек соединим фигуру сечения с учетом видимости. Натуральную величину фигуры сечения определим плоскопараллельным перемещением. Горизонтально-проецирующую плоскость $\alpha(\alpha_1)$, заданную своим собирательным следом, превратим в плоскость фронтального уровня. Для этого переместим собирательный след в любое удобное место так, чтобы $\alpha_1 \cong \alpha^*_1$. Построим новые проекции точек на пересечении новых координат x и старых координат z . На фронтальной плоскости получим истинную величину фигуры сечения.

Решим аналогичную задачу на построение натуральной величины фигуры сечения наклонного цилиндра (рис. 7.14, а), решение показано на рис. 7.14, б.

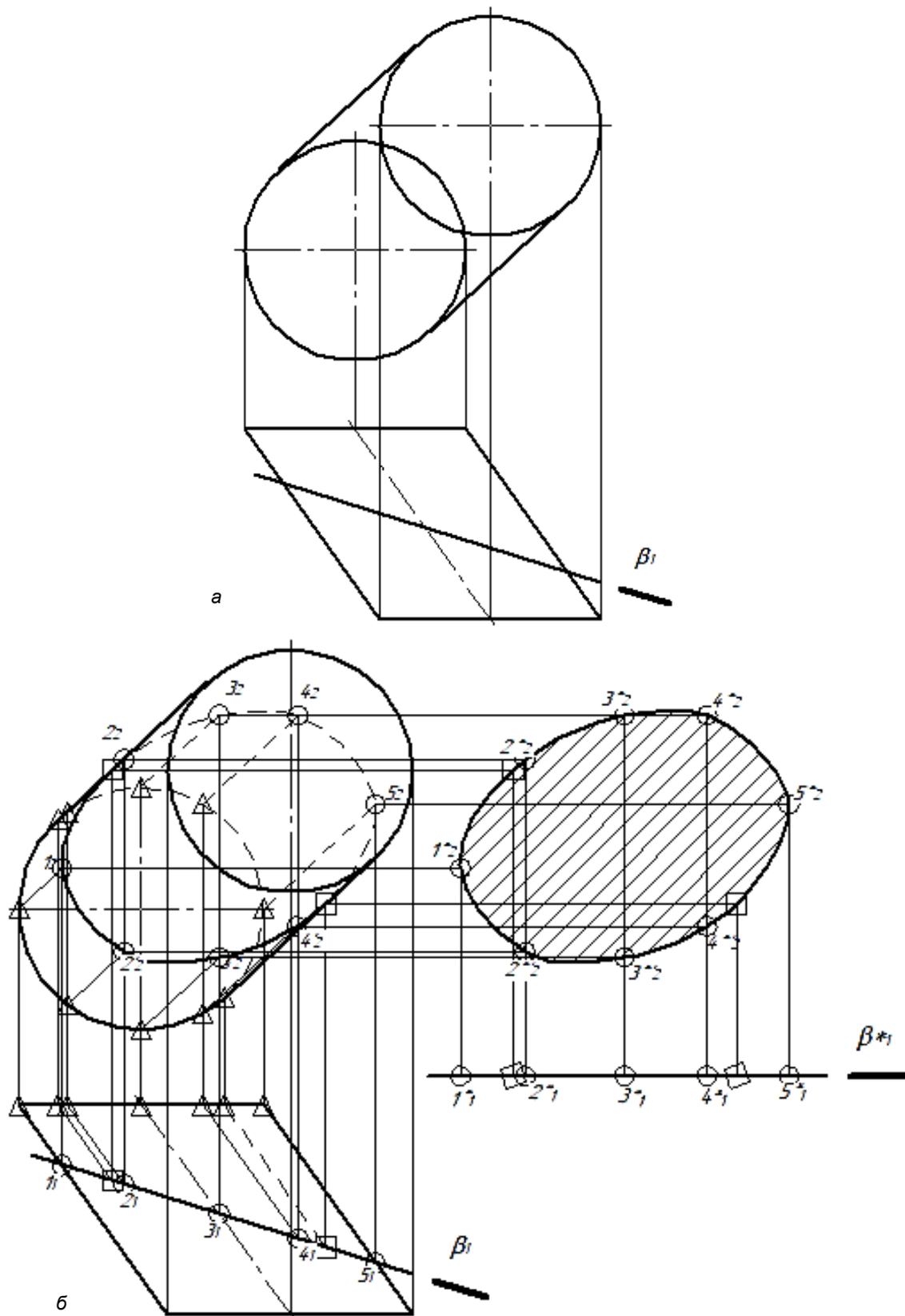


Рис. 7.14

7.2.2. Определение точек встречи прямой и поверхностей вращения

Данную задачу следует решать путем заключения прямой во вспомогательную плоскость. Ищем фигуру сечения, а далее, где прямая имеет точки входа и выхода в фигуру сечения, и есть искомое решение.

Определим точки пересечения наклонного конуса и прямой m (рис. 7.15, а).

Определим видимость наклонного конуса: на фронтальной плоскости часть основания невидима, так как на горизонтальной плоскости видна сначала боковая поверхность конуса (рис. 7.15, б).

Вычертим проекции прямой m основной линией за пределами очерка наклонного конуса (для удобства решения задачи).

Вспомним фигуры сечения конуса различными плоскостями и выберем вспомогательную плоскость общего положения, проходящую через вершину конуса, точку S . Такая плоскость пересечет конус по образующим, т.е. фигурой сечения является *треугольник*. Основание конуса поставим на фронтальную плоскость проекций, для этого ось x_{12} совместим с вырожденной проекцией основания на горизонтальной плоскости. Вспомогательная плоскость будет задана пересекающимися линиями $\gamma(m \cap l = 1)$. Точка 1 – любая точка прямой m и линия l должна пройти через вершину конуса. Построим фронтальный след этой плоскости $\gamma(m \cap l = 1)$. Для этого у прямых m и l найдем точки с координатой $y = 0$.

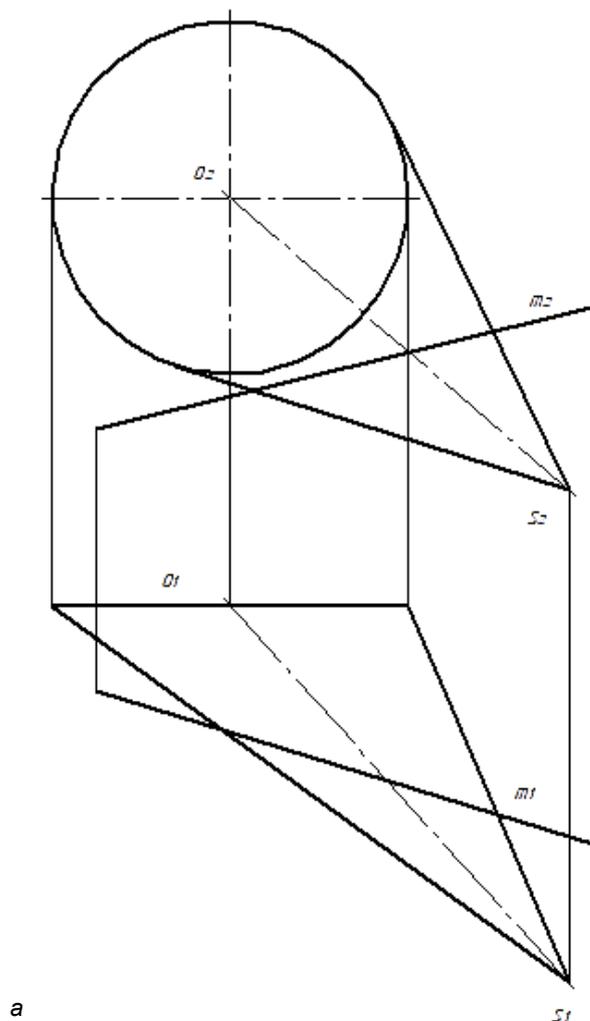
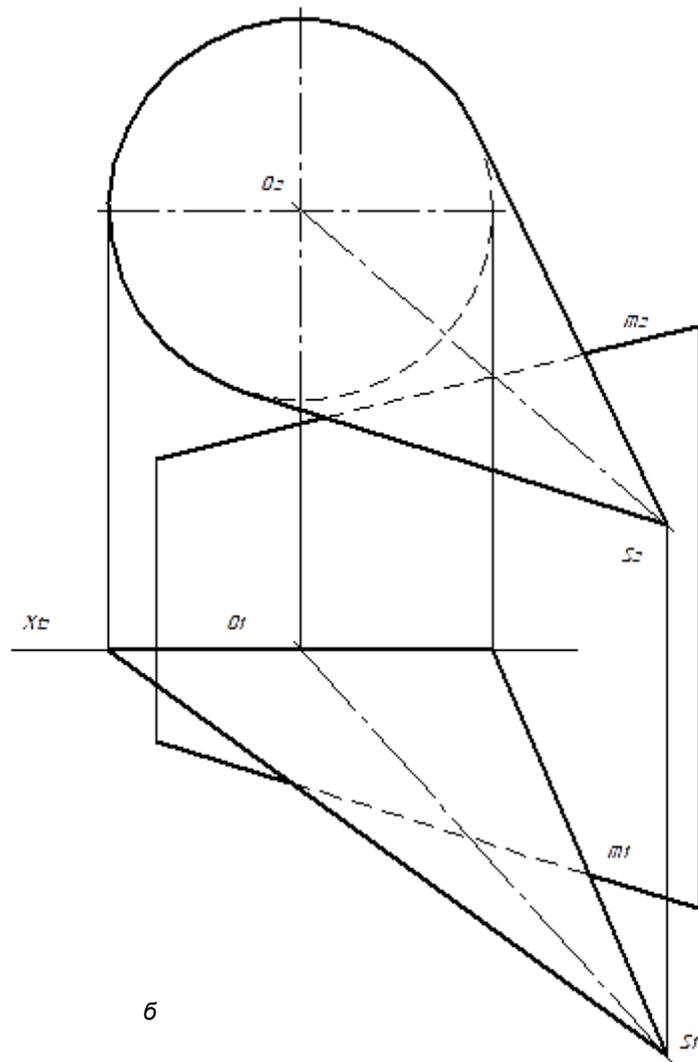


Рис. 7.15 (начало)



б

Рис. 7.15 (продолжение)

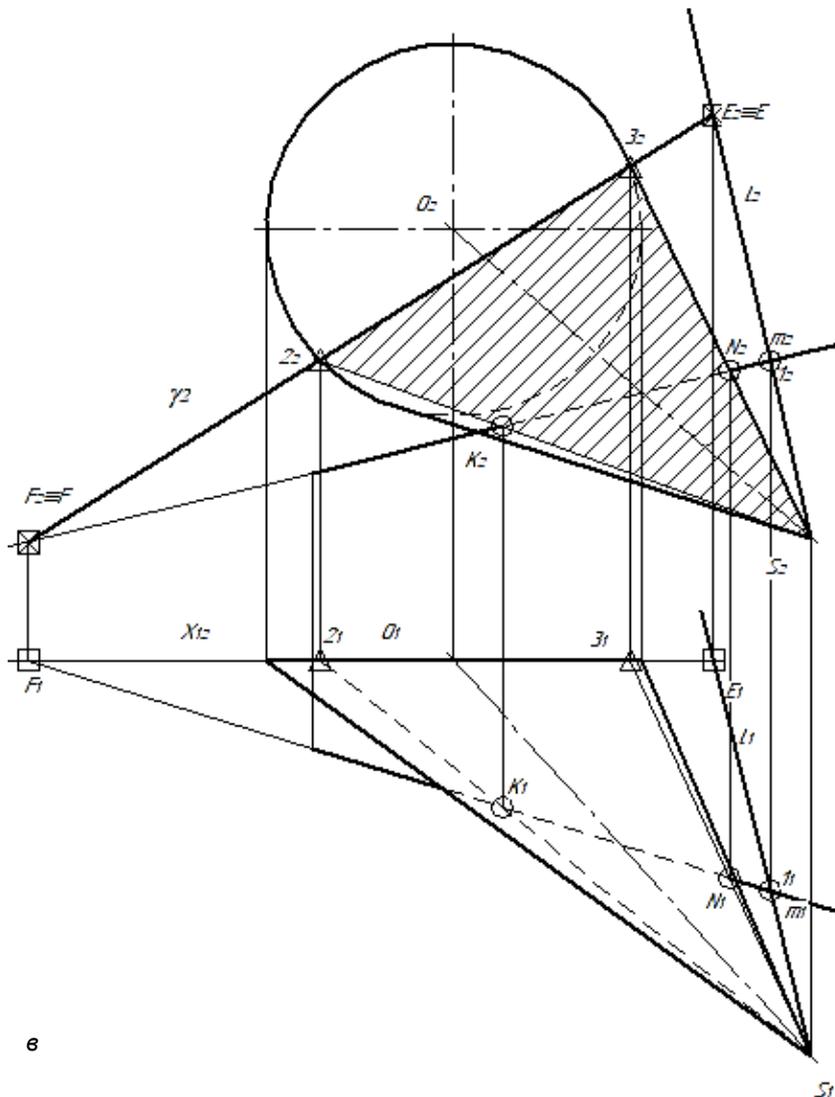


Рис. 7.15 (окончание)

Это точки там, где горизонтальные проекции прямых пересекают ось x_{12} : F и E . Соединив их фронтальные проекции, получим фронтальный след плоскости γ_2 . Фронтальный след пересекает основание конуса в точках 2 и 3. Соединив их вершиной конуса, получим фигуру сечения. Покажем точки встречи F и E на проекциях (рис. 7.15, в).

Определим видимость прямой m , на фронтальной проекции образующая $2S$ видима, значит, проекция прямой до K_2 видима, а вторая образующая $3S$ невидима, т.е. после N_2 проекция прямой еще невидима до очерка конуса. На горизонтальной проекции образующая $2S$ невидима, поэтому горизонтальная проекция прямой m после очерка до K_1 невидима. Образующая $3S$ видима, после N_1 горизонтальная проекция прямой m видима (рис. 7.15, в).

Задача 7.1. Определите точки пересечения наклонного цилиндра и прямой k (рис. 7.16, а).
Решение.

Выберем вспомогательную плоскость для построения простой фигуры сечения. Такой плоскостью будет плоскость общего положения, содержащая прямую, параллельную очерковой образующей наклонного цилиндра. Такая плоскость пересечет цилиндр по образующим, т.е. фигурой сечения будет четырехугольник (рис. 7.16, б). Совместим одно из оснований с горизонтальной плоскостью проекций, для чего проведем ось x_{12} через вырожденное основание на фрон-

тальной плоскости проекций. Плоскость вспомогательная будет задана пересекающимися линиями $\omega(k \cap g = 1)$. Линия g параллельна образующей наклонного цилиндра (оси вращения цилиндра) (рис. 7.16, в).

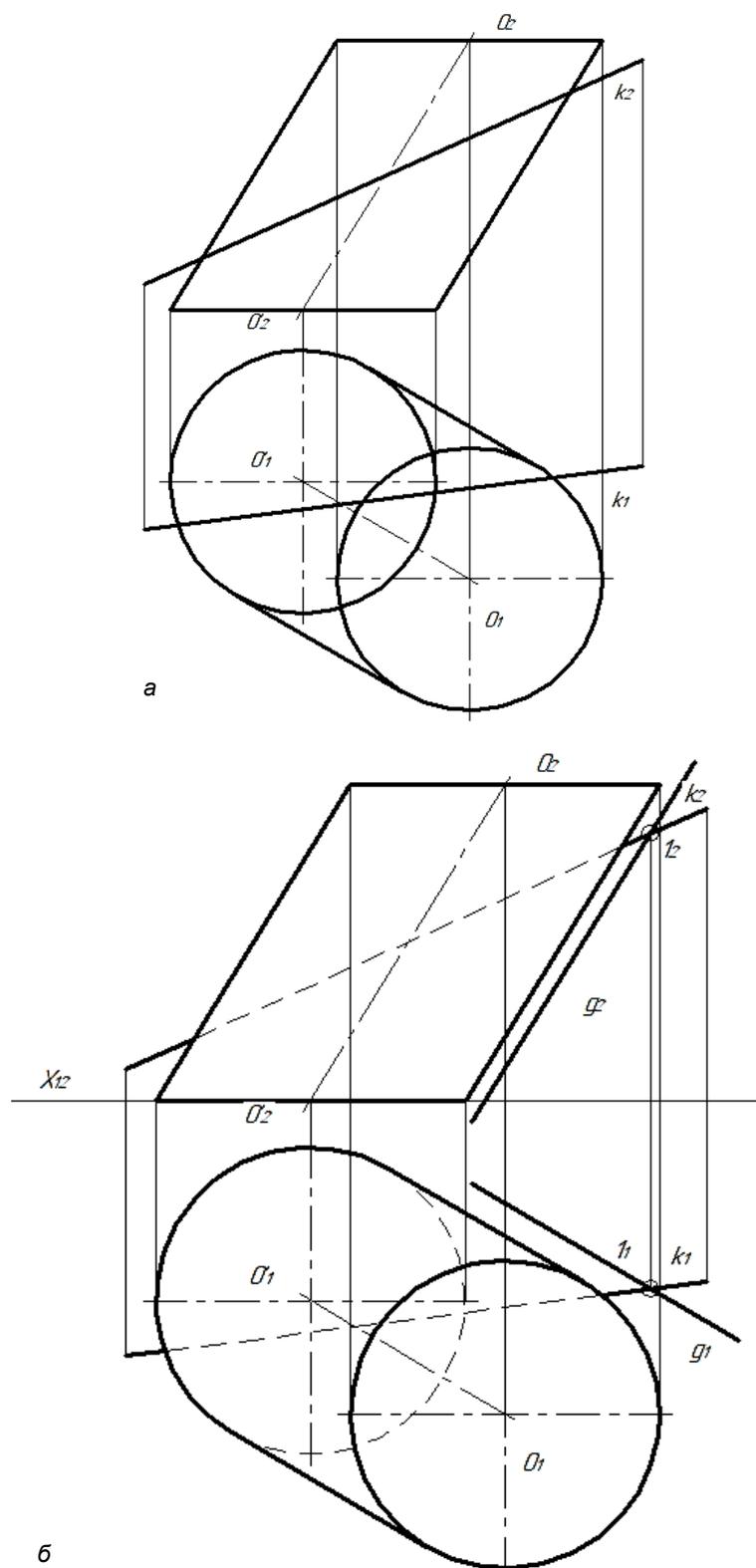
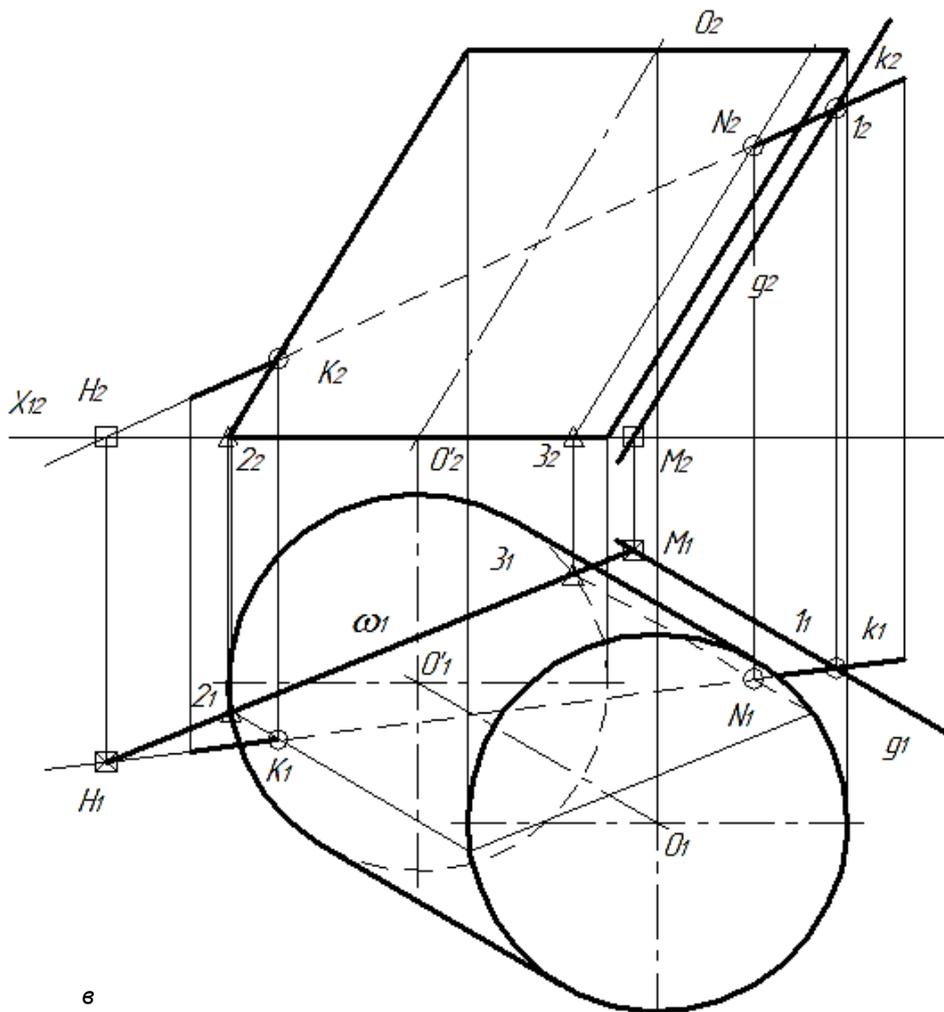


Рис. 7.16 (начало)



6

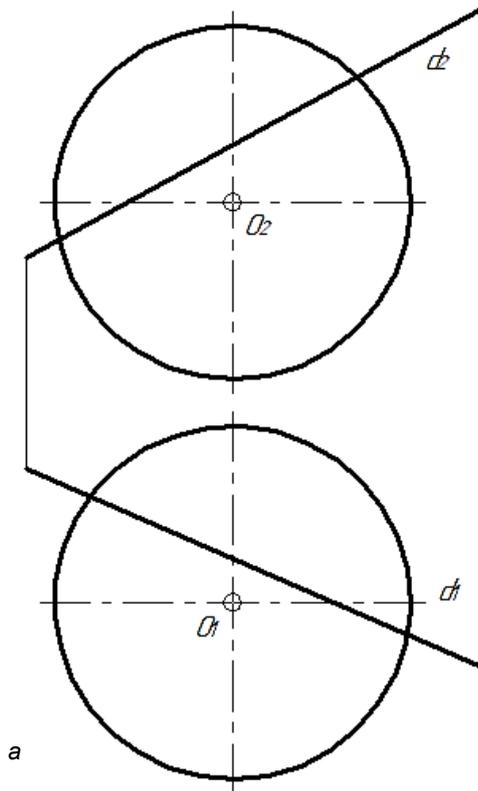
Рис. 7.16 (окончание)

Задача 7.2. Определите точки пересечения сферы и прямой d (рис. 7.17, а).

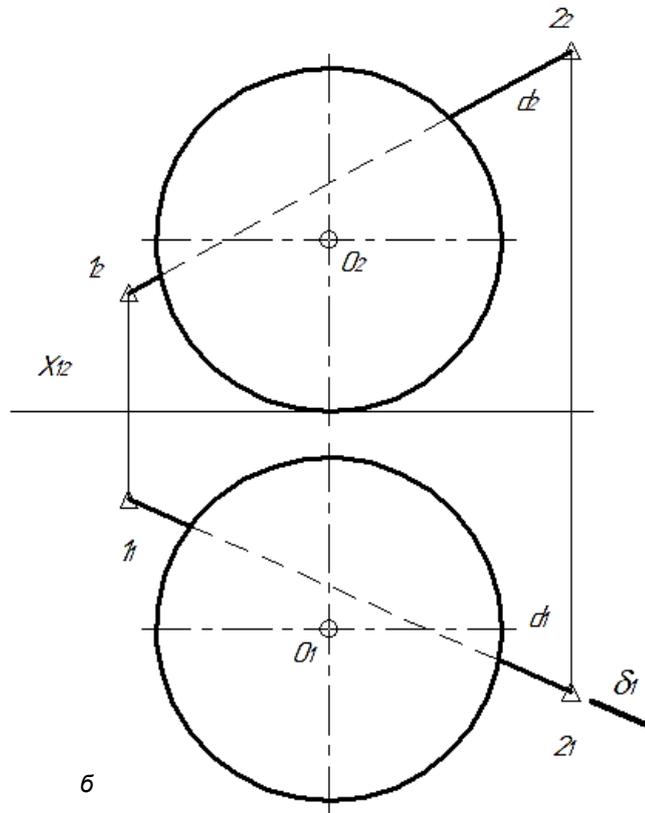
Решение.

Вначале прямую, за пределами очерковых образующих выполним основной линией, а внутри образующих – линией невидимого контура (рис. 7.17, б).

При решении этой задачи, вспомним, что фигура сечения сферы плоскостью всегда круг, но, чтобы он спроецировался в натуральную величину, нужно чтобы ее секущая плоскость была параллельна очерковой образующей. Поэтому заключим прямую d во вспомогательную проецирующую плоскость δ . Методом перемены плоскостей проекций поставим эту вспомогательную плоскость параллельно очерку сферы. Дальнейший ход решения ясен (рис. 7.17, в).



a



b

Рис. 7.17 (начало)

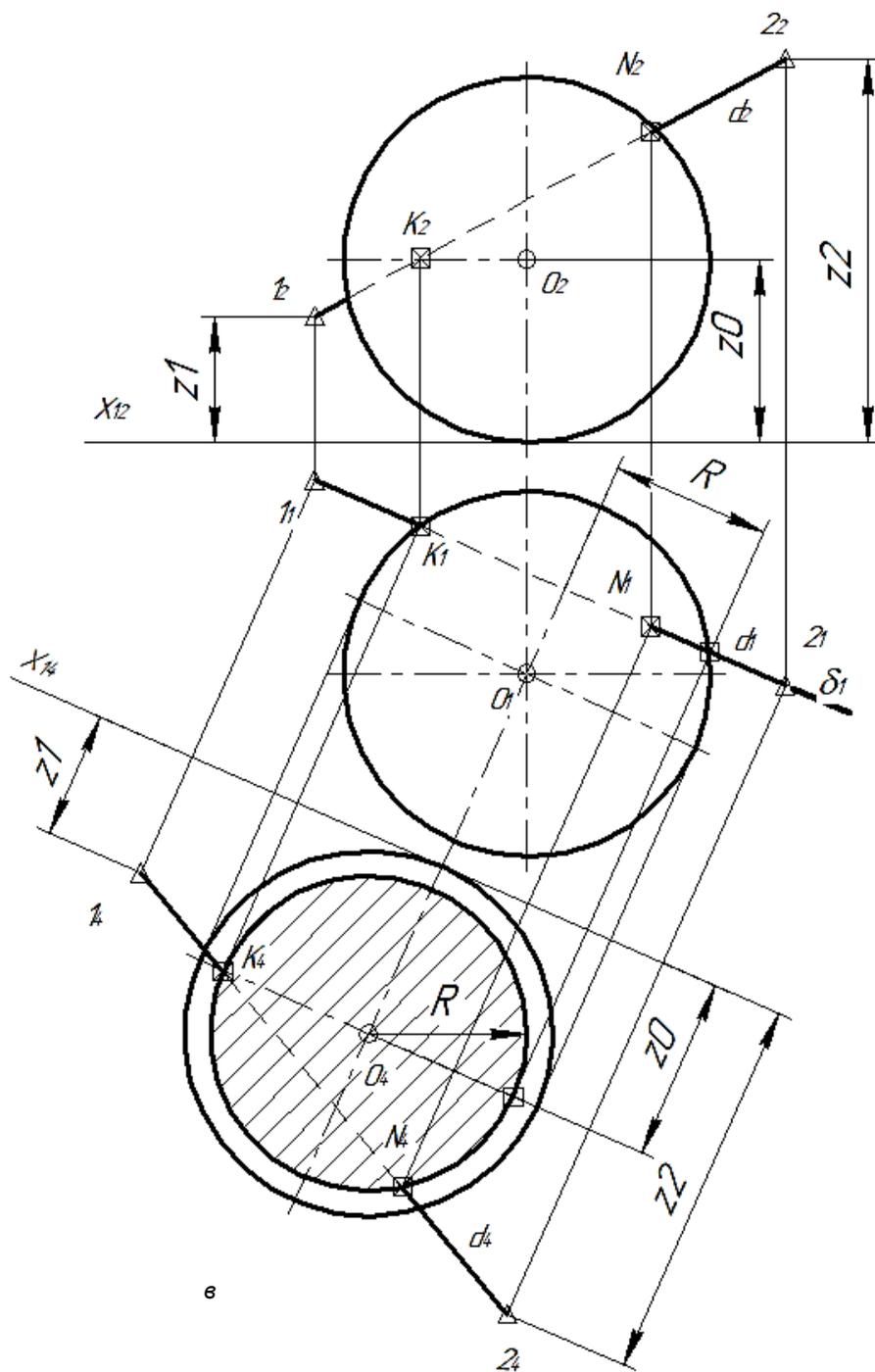


Рис. 7.17 (окончание)

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бубенников, А.В.** Начертательная геометрия / А.В. Бубенников, М.Я. Громов. – М.: Высшая школа, 1973. – 416 с.
2. **Фролов, С.А.** Начертательная геометрия / С.А. Фролов. – М.: Машиностроение, 1973. – 240 с.
3. **Короев, Ю.И.** Начертательная геометрия / Ю.И. Короев. – М.: Стройиздат, 1987. – 164 с.
4. **Арустамов, Х.А.** Сборник задач по начертательной геометрии / Х.А. Арустамов. – М.: Машиностроение, 1978. – 445 с.
5. **Посвянский, А.Д.** Сборник задач по начертательной геометрии / А.Д. Посвянский, Н.Н. Рыжов. – М.: Высшая школа, 1963. – 288 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Принятые в начертательной геометрии обозначения.....	3
Используемые символы	4
1. Методы проецирования геометрических форм на плоскости	4
1.1. Центральное проецирование	4
1.2. Параллельное проецирование.....	5
1.3. Инвариантные (неизменяемые) свойства ортогонального проецирования.....	6
1.4. Прямоугольное (ортогональное) проецирование	8
2. Пространственная модель координатных плоскостей проекций, положение точек в пространстве	9
2.1. Угловые пространства.....	9
2.2. Наглядное изображение точки в пространстве и ее эюр (ортогональный чертеж).....	10
2.3. Положение точек на эюре в зависимости от углового пространства	12
2.4. Бессекторные плоскости и их свойства	13
3. Прямые в пространстве	15
3.1. Прямые общего положения, истинная величина отрезка и углы наклона к плоскостям проекций	15
3.2. Взаимное положение прямых в пространстве и их отображение на эюре	18
3.3. Линии уровня.....	20
3.3.1. Горизонтальные прямые.....	20
3.3.2. Фронтальные прямые.....	21
3.3.3. Профильные прямые	23
3.3.4. Линии, параллельные плоскости симметрии σ	26
3.3.5. Линии, параллельные плоскости тождества τ	27
3.4. Проецирующие прямые	27
3.4.1. Горизонтально-проецирующие прямые	27
3.4.2. Фронтально-проецирующие прямые	28
3.4.3. Профильно-проецирующие прямые	29
4. Плоскости в пространстве	30
4.1. Плоскости общего положения	30
4.1.1. Способы задания плоскостей общего положения.....	30
4.1.2. Алгоритм принадлежности точки и линии плоскости	32
4.1.3. Главные линии плоскости: горизонталь h и фронталь f	34
4.2. Проецирующие плоскости	37
4.2.1. Горизонтально-проецирующие плоскости	37
4.2.2. Фронтально-проецирующие плоскости	41
4.2.3. Профильно-проецирующие плоскости	43
4.3. Плоскости уровня	44
4.3.1. Плоскости горизонтального уровня	44
4.3.2. Плоскости фронтального уровня	45
4.4. Взаимное положение плоскостей.....	46
5. Решение позиционных задач.....	47
5.1. Построение линии пересечения двух плоскостей общего положения	47
5.2. Определение точки пересечения прямой и плоскости общего положения, определение видимости прямой.....	49
5.3. Определение расстояния от точки пространства M до заданной плоскости.....	50
6. Методы преобразования проекций	53
6.1. Метод перемены плоскостей проекций	53
6.1.1. Алгоритм для прямой	54
6.1.2. Алгоритм для плоскости	67

6.2. Метод плоскопараллельного перемещения	77
6.2.1. Способ параллельного перемещения (переноса).....	77
6.2.2. Способ вращения вокруг линий уровня	91
7. Поверхности.....	102
7.1. Гранные поверхности.....	102
7.1.1. Сечение плоскостью гранной поверхности.....	105
7.1.2. Определение точек встречи прямой и гранной поверхности.....	110
7.2. Поверхности вращения.....	113
7.2.1. Определение фигуры сечения поверхности вращения.....	120
7.2.2. Определение точек встречи прямой и поверхностей вращения	125
Список рекомендуемой литературы	132

Учебное издание

Говорова Ольга Васильевна

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редактор *А.В. Осокина*
Корректор *Е.В. Шорикова*
Верстка *Т.В. Лебедевой*

Подписано в печать 14.02.2020.
Формат 60×90/8. Бумага писчая. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 15,0. Усл. печ. л. 16,9. Тир. 150. Зак. 5516.
Издательство СПбГМТУ.
190121, СПб., Лоцманская ул., 10.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МОРСКОЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О.В. ГОВОРОВА

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2020